

# Volumenabschätzung konvexer Körper

Seminar zur Stochastischen Analysis

Prof. Dr. Andreas Eberle

Referent: Harald G. Grohgan

## 1 Inhaltsübersicht

### Inhaltsverzeichnis

<b>1 Inhaltsübersicht</b>	<b>1</b>
<b>2 Einführung und Problematik</b>	<b>1</b>
2.1 Motivation . . . . .	1
2.2 Wiederholung . . . . .	2
<b>3 Konvergenz des ball walk</b>	<b>3</b>
3.1 Stationäre Verteilungen des ball walk . . . . .	3
3.2 Konvergenz ins Gleichgewicht . . . . .	6
3.3 Beweis der Poincaré-Ungleichung . . . . .	7
<b>4 Anwendung und Ausblick</b>	<b>10</b>
4.1 Implementierung . . . . .	10
4.2 Volumenberechnung . . . . .	11
4.3 Ausblick . . . . .	12
<b>5 Literatur</b>	<b>13</b>

## 2 Einführung und Problematik

### 2.1 Motivation

#### Problemstellung

Gegeben sei ein konvexer Körper  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , wobei  $n$  typischerweise groß ist. Eine direkte Berechnung des Volumens ist auf Grund der hohen Dimension praktisch nicht möglich, wir wählen daher ein Monte-Carlo-Verfahren.

Hierbei müssen wir das Problem in zwei Schritte unterteilen:

- Simuliere gleichverteilte Punkte auf  $K$ ;
- Schätze das Volumen  $Vol_n K$  von  $K$  ab.

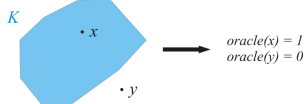
Hierbei ist vor allem die Simulation interessant, die Volumenabschätzung ergibt sich als Grenzwert der Summation genügend vieler Punkte und kann daher auf das erste Problem zurückgeführt werden.

#### Methodik: Orakelfunktion

Wir nehmen an, dass wir  $K$  durch eine Orakelfunktion gegeben haben, die für ein gegebenes  $x \in \mathbb{R}^n$  angibt, ob  $x \in K$  gilt. Ein Beispiel für eine Orakelfunktion ist die Indikatorfunktion:

$$oracle(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases} .$$

In der Praxis geschieht dies oft durch Lineare Programmierung, aber es gibt auch Fälle, in denen ein exaktes Orakel nicht möglich ist.



4

### Methodik: Fluch der Dimension

Ebenfalls ist ein direktes Monte-Carlo-Verfahren nicht möglich, da  $K$  im Vergleich zum möglichen Samplingbereich verschwindend gering sein kann.

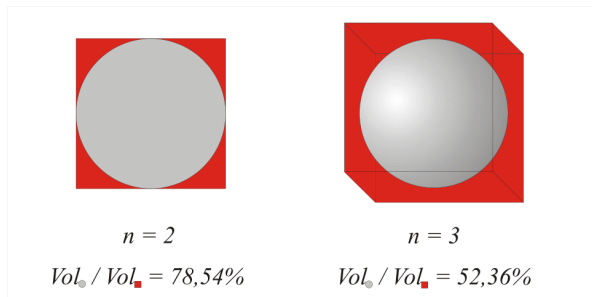
Sei etwa  $K = B_n(0, 1)$  die Einheitskugel und  $C = [-1, 1]^n$  der kleinste Würfel, der  $K$  enthält. Hier kann  $\text{Vol}_n K$  exakt berechnet werden und wir erhalten

$$\frac{\text{Vol}_n K}{\text{Vol}_n C} = \frac{\pi^{n/2}}{n \cdot \Gamma(n/2)} \rightarrow 0$$

exponentiell schnell.

5

### Abbildung: Fluch der Dimension



6

### Methodik: Der ball walk

Daher nutzen wir das Prinzip des *ball walk*:

Gegeben sei ein Punkt  $X_t \in K$ , welcher der Position des random walk zur Zeit  $t$  entspricht. Wir wählen  $X_{t+1}$  i.i.d. aus  $B(X_t, \delta) \cap K$ , wobei  $B(x, r)$  die  $n$ -dim. Kugel um  $x$  mit dem Radius  $\delta$  beschreibt. Die geeignete Wahl von  $\delta$  ergibt sich aus zusätzlichen Informationen, die wir über  $K$  haben.

Wir werden zeigen, dass diese Markovkette eine stationäre Verteilung hat, welche annähernd der Gleichverteilung auf  $K$  entspricht, und dass die Konvergenzrate polynomiell in  $n$  ist.

7

### Algorithmen: Direkt vs. Metropolis

#### Warnung: Theorie und Praxis

Für unsere weiteren Betrachtungen müssen wir feststellen, dass der oben beschriebene Algorithmus, d.h. die Wahl eines Punktes  $X_{t+1} \in B(X_t, \delta) \cap K$  i.i.d. für ein allgemeines  $K$  nicht implementierbar ist. Dennoch werden wir uns in der Theorie oft auf diesen *direkten Algorithmus* beziehen.

In der Praxis verwenden wir eine Art *Metropolis*-Algorithmus:

Wähle  $y \in B(X_t, \delta)$  i.i.d. Wenn  $oracle(y) = 1$ , setze  $X_{t+1} := y$ . Sonst setze  $X_{t+1} := X_t$ .

Wir sehen später, dass die *Metropolis*-Variante nur um einen konstanten Faktor langsamer als die *direkte* Variante ist.

8

## 2.2 Wiederholung

### Notation bei raumkontinuierlichen Markovketten

Dadurch, dass bei kontinuierlichem Zustandsraum (mit diskreter Zeit) die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Punkt  $x \in K$  zu einem Punkt  $y \in K$  fast sicher 0 beträgt, betrachten wir hier die Wahrscheinlichkeit, dass wir zur Zeit 1 in eine messbare Menge  $A$  gesprungen sind, m.a.W.  $P[x, A] = \mathbb{P}[X_1 \in A \mid X_0 = x]$ .

Die Wahrscheinlichkeit für Schritt  $t$  definieren wir induktiv mit  $P^1 = P$  und

$$P^t(x, A) := \int_K P^{t-1}(x, dy) P(y, A) \quad \text{für } t > 1.$$

---

9

### Notation bei raumkontinuierlichen Markovketten

Im Falle des *ball walk* erhalten wir

$$P(x, A) = \frac{\text{Vol}_n(B(x, \delta) \cap A)}{\text{Vol}_n(B(x, \delta) \cap K)}$$

für jede messbare Menge  $A \subseteq K$  und

$$P(x, dy) = \frac{dy}{\text{Vol}_n(B(x, \delta) \cap K)}, \quad (1)$$

gegeben  $y \in B(x, \delta) \cap K$ .

---

10

### Stationäre Verteilung

**Definition 1.** Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\mu$  heißt *stationär* oder *invariant* für  $P$ , wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

$$\mu(A) = \int_K P(x, A) \mu(dx)$$

für alle messbaren Mengen  $A \in K$ .

Die stationäre Verteilung ist *eindeutig*, wenn  $P^t(x, A) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu(A)$  für alle  $x$  und alle  $A$  gilt.

---

11

## 3 Konvergenz des ball walk

### 3.1 Stationäre Verteilungen des ball walk

#### Erste Anforderungen an $\delta$

Um sinnvolle Aussage über stationäre Verteilungen treffen und somit mit den vorgestellten Algorithmen arbeiten zu können, ist es notwendig, eine Bedingung an  $\delta$  aufzustellen:

$$\delta \leq \sup\{\|x - y\| : x, y \in K\},$$

d.h.  $\delta$  muss kleiner sein als der Durchmesser von  $K$ , da wir sonst im ersten Schritt bereits die Gleichverteilung als stationäre Verteilung erhalten – somit haben wir das Problem, einen Punkt i.i.d. auf ganz  $K$  zu erzeugen. Dies ist aber exakt das Ausgangsproblem!

Für die Anwendung des Metropolis-Algorithmus sollte ferner das Verhältnis

$$\frac{\text{Vol}_n B(X_t, \delta) \cap K}{\text{Vol}_n B(X_t, \delta)}$$

nicht zu klein sein.

---

12

#### Krümmungsbedingung

Ist  $K$  sehr lang und dünn, wird die Konvergenzrate des Metropolis-Algorithmus signifikant sinken:  $\delta$  muss klein genug sein, dass der ball walk überhaupt Punkte in  $K$  trifft – aber andererseits groß genug, dass der Prozess ganz  $K$  erreichen kann.

Für das weitere Vorgehen stellen wir daher eine Krümmungsbedingung auf, die insbesondere in der Theorie wesentliche Vereinfachungen zulässt:

$$\forall x \in K \exists y \in K : x \in B(y, 1) \subseteq K. \quad (2)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass wir ganz  $K$  mit 1-Bällen überlagern können.

---

13

## Lokale Leitfähigkeit

Die gesuchte stationäre Verteilung ist bei der direkten Methode zwar nicht gleichverteilt, für kleines  $\delta$  jedoch annähernd. Um die stationäre Verteilung zu beschreiben, definieren wir die Funktion  $\ell : K \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt:

$$\ell(x) := \frac{\text{Vol}_n B(x, \delta) \cap K}{\text{Vol}_n B(x, \delta)} \quad (3)$$

$\ell$  heißt *lokale Leitfähigkeit* und beschreibt anschaulich die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Punkt aus dem  $\delta$ -Ball um  $x$  in  $K$  liegt.

Wir normalisieren  $\ell(x)$ , um eine Dichtefunktion zu erhalten, welche sich als die Dichte der stationären Verteilung des *ball walk* erweisen wird:

$$\mu(A) := \frac{\int_A \ell(x) dx}{\int_K \ell(x) dx}. \quad (4)$$

14

## $\mu$ ist stationäre Verteilung

**Lemma 2.** Wenn  $X_0$   $\mu$ -verteilt ist, dann gilt dies auch für  $X_1$ .

Zum Beweis bezeichne  $\mu_1$  die Verteilung von  $X_1$  und wir setzen  $L := \int_K \ell(x) dx$ .

15

## Beweis des ersten Lemmas

$$\begin{aligned} \mu_1(A) = \int_A \mu_1(dy) &= \int_A \int_K P(x, dy) \mu(dx) \\ &= \int_A dy \int_{B(y, \delta) \cap K} \frac{\mu(dx)}{\text{Vol}_n B(x, \delta) \cap K} \quad (\text{mit 1}) \\ &= \frac{1}{L} \int_A dy \int_{B(y, \delta) \cap K} \frac{\ell(x) dx}{\text{Vol}_n B(x, \delta) \cap K} \quad (\text{mit 4}) \\ &= \frac{1}{L} \int_A dy \int_{B(y, \delta) \cap K} \frac{dx}{\text{Vol}_n B(x, \delta)} \quad (\text{mit 3}) \\ &= \frac{1}{L} \int_A dy \frac{\text{Vol}_n B(y, \delta) \cap K}{\text{Vol}_n B(y, \delta)} \\ &= \frac{1}{L} \int_A \ell(y) dy = \mu(A) \quad (\text{mit 3, 4}) \end{aligned}$$

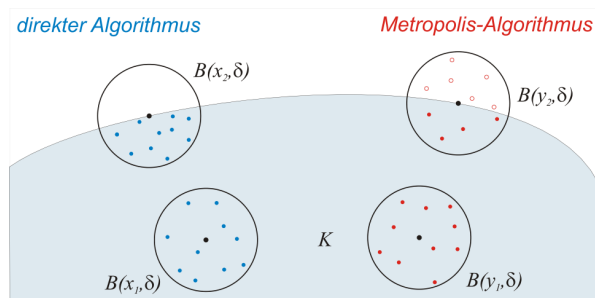
qed.

16

## Bemerkung: Gleichvert. stationär bei Metropolis

Analog zu oben zeigt man, dass die Gleichverteilung eine stationäre Verteilung für die *Metropolis*-Variante ist.

Anschaulich ist dies klar:



17

### Laufzeitvergleich Metropolis vs. direkt

**Lemma 3.** Wir nehmen die Krümmungsbedingung (2) an und wählen  $\delta \leq \frac{c_1}{\sqrt{n}}$ , wobei  $c_1$  eine dimensionsunabhängige Konstante ist. Dann gilt:

$$\frac{4}{10} \leq \ell(x) \leq 1$$

für alle  $x \in K$ .

18

### Beweis des zweiten Lemmas

Die obere Schranke ist trivial.

Unter Annahme der Krümmungsbedingung liegt jedes  $x \in K$  in einem 1-Ball  $B(y, 1) \subseteq K$ .

Wir zeigen daher

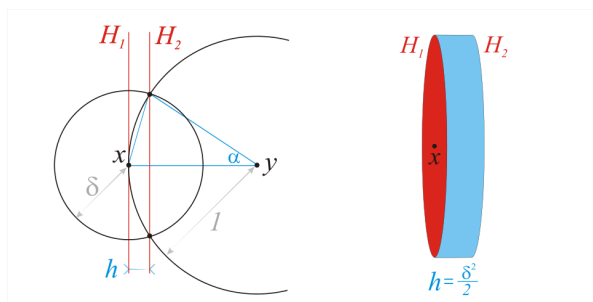
$$\frac{\text{Vol}_n B(x, \delta) \cap B(y, 1)}{\text{Vol}_n B(x, \delta)} \geq \frac{4}{10}.$$

Es genügt zu zeigen, dass dies für  $x$  auf dem Rand von  $B(y, 1)$  gilt.

Wir betrachten die Tangentialebene  $H_1$  zu  $B(y, 1)$  durch  $x$  und eine parallele Hyperebene  $H_2$  durch die beiden Schnittpunkte der Bälle.

19

### Graphik zum Beweis des zweiten Lemmas



20

### Fortsetzung des Beweises

Mit  $H_i^+$  bezeichnen wir die Seite der Hyperebenen, die den Punkt  $y$  enthält. Es gilt

$$B(x, \delta) \cap H_2^+ \subseteq B(y, 1)$$

für  $\delta < 1$ . Also genügt zu zeigen:

$$\text{Vol}_n B(x, \delta) \cap H_2^+ \leq \frac{4}{10} \cdot \text{Vol}_n B(x, \delta)$$

Wir zeigen daher, dass  $B(x, \delta) \cap H_2^- \cap H_1^+$  höchstens 1/10 des Volumens von  $B(x, \delta)$  hat.

Dazu betrachten wir den Zylinder mit Grundfläche  $B(x, \delta) \cap H_1$ , dessen Höhe der Abstand von  $H_1$  und  $H_2$  ist. Diese Höhe beträgt genau  $\delta^2/2$ .

21

### Fortsetzung des Beweises

Mit der Volumenformel für  $n$ -dim. Kugeln sowie die Stirlingsche Abschätzung der  $\Gamma$ -Funktion erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol}_{n-1} B(x, \delta) \cap H_1}{\text{Vol}_n B(x, \delta)} &= \frac{\delta^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\delta^n \pi^{\frac{n}{2}} \cdot (n-1) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\ &< \frac{n \sqrt{2\pi} \left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{n+3}{2}} e^{-\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{\pi} \delta (n-1) \cdot \sqrt{2\pi} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{n-1}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2\pi} \delta} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt{\frac{(n+2)^{n+3}}{(n+1)^{n+2}}} \\ &\stackrel{n>2}{\leq} \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2\pi} \delta} \cdot e \cdot 2^2 \cdot \sqrt{n} =: \frac{c\sqrt{n}}{\delta} \end{aligned}$$

### Abschluss des Beweises

Somit gilt:

$$\frac{\text{Vol}_n(\text{Zylinder})}{\text{Vol}_n B(x, \delta)} \leq \frac{1}{2} c \delta \sqrt{n}.$$

Setzen wir

$$c_1 = \frac{1}{5c} \quad (\text{unabhängig von } n !)$$

erhalten wir die gewünschte Abschätzung.

*qed.*

## 3.2 Konvergenz ins Gleichgewicht

### "Partition der Varianz"

Wir zeigen nun, dass der *ball walk* schnell gegen die stationäre Verteilung konvergiert.

**Lemma 4.** *Sei  $f$  eine messbare Funktion auf einer messbaren Menge  $M$  und  $M_0, \dots, M_{n-1}$  eine Partition von  $M$ . Dann gilt:*

$$\int_M f^2 d\mu = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{M_i} (f - \bar{f}_i)^2 d\mu + \sum_{i=0}^{n-1} \mu(M_i) \bar{f}_i^2,$$

wobei

$$\bar{f}_i = \frac{1}{\mu(M_i)} \int_{M_i} f d\mu.$$

### Beweis des dritten Lemmas

$$\begin{aligned} & \int_{M_i} (f - \bar{f}_i)^2 d\mu + \mu(M_i) \bar{f}_i^2 \\ &= \int_{M_i} f^2 d\mu + \int_{M_i} \bar{f}_i^2 d\mu - 2 \int_{M_i} \bar{f}_i f d\mu + \mu(M_i) \bar{f}_i^2 \\ &= \int_{M_i} f^2 d\mu + \mu(M_i) \bar{f}_i^2 - 2\mu(M_i) \bar{f}_i^2 + \mu(M_i) \bar{f}_i^2 \\ &= \int_{M_i} f^2 d\mu. \end{aligned}$$

*qed.*

### Notationen

Um die Konvergenzrate abzuschätzen, betrachten wir den Abfall der Varianz einer Testfunktion  $f$  (mit  $\mathbb{E}f = 0$  nach Konvention). Hierfür betrachten wir eine Funktion  $h : K \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} h(x) &:= \frac{1}{2} \int_K P(x, dy) (f(x) - f(y))^2 \\ &= \frac{1}{2 \text{Vol}_n B(x, \delta) \cap K} \int_{B(x, \delta) \cap K} (f(x) - f(y))^2 dy \end{aligned} \quad (5)$$

und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \text{Var}_\mu f &:= \int_K f^2 d\mu \quad (\text{Varianz auf } K) \\ \mathcal{E}_P(f, f) &:= \int_K h d\mu \quad (\text{Dirichletform, "lokale Variation"}) \end{aligned}$$

## Die Poincaré-Ungleichung

**Theorem 5** (Poincaré-Ungleichung). Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein konvexer Körper mit Durchmesser  $D$ , der die Krümmungsbedingung (2) erfüllt. Wähle  $\delta \leq c_1/\sqrt{n}$  wie im zweiten Lemma. Dann gilt für jede messbare Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mathcal{E}_P(f, f) \geq \lambda \cdot \text{Var}_\mu f,$$

wobei gilt:

$$\lambda = \frac{c_2 \cdot \delta^2}{D^2 \cdot n}$$

für eine dimensionsunabhängige Konstante  $c_2$ .

27

## Von der Ungleichung zur Laufzeit

Aus der Poincaré-Ungleichung lässt sich eine Beschränkung der Laufzeit herleiten:

**Theorem 6** (Laufzeitabschätzung). Für ein  $\varepsilon > 0$  sei  $\tau(\varepsilon)$  die vom ball walk benötigte Zeit, die stationäre Verteilung  $\mu$  bis auf Variationsnorm  $\varepsilon$  zu erreichen. Unter der Krümmungsbedingung (2) gilt:

$$\tau(\varepsilon) \leq O(\lambda^{-1}(\log \varepsilon^{-1} + i(\mu_0))),$$

wobei  $i(\mu_0)$  die Abhängigkeit von der Startverteilung beschreibt und  $\lambda$  wie in der Poincaré-Ungleichung bestimmt ist.

In der Praxis ist  $i(\mu_0)$  etwa in der Größenordnung  $n \log(D/2\delta)$ . (ohne Beweis)

28

## 3.3 Beweis der Poincaré-Ungleichung

### Beweis: Grundidee

Wir beweisen nun die Poincaré-Ungleichung mit einem Widerspruchsbeweis. Annahme: Es existiert ein  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\mathcal{E}_P(f, f) < \lambda \cdot \text{Var}_\mu f. \quad (6)$$

Nun suchen wir kleiner werdende *schlechte Mengen*  $M$ , bei denen der Quotient

$$\frac{\int_M h \, d\mu}{\int_M (f - \bar{f})^2 \, d\mu} \quad (7)$$

klein ist, wobei  $\bar{f} = \int_M f \, d\mu$ . Setzen wir  $M = K$ , so erhalten wir

$$\frac{\int_K h \, d\mu}{\int_K (f - \bar{f})^2 \, d\mu} = \frac{\mathcal{E}_P(f, f)}{\text{Var}_\mu f} < \lambda.$$

Wir versuchen, auch in Abhängigkeit von  $\delta$  *kleine*  $M$  zu bekommen – denn dann muss  $f$  nahezu konstant auf  $M$  sein, obwohl die globale Varianz groß ist. Hier erreichen wir den Widerspruch.

29

### Beh.: Schlechte Mengen sind platt

Als erstes zeigen wir, dass die schlechte Menge auf eine *platte Menge*  $K_1$  eingeschränkt werden kann, d.h.  $K_1$  ist in allen Dimensionen bis auf einer sehr klein. Natürlich achten bei unseren Einschränkungen darauf, dass das Verhältnis (7) durch  $\lambda$  beschränkt bleibt.

**Behauptung.** Angenommen,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt die Ungleichung (6) und  $\mathbb{E}_\mu = 0$ . Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine konvexe Teilmenge  $K_1 \subseteq K$ , welche

$$\int_{K_1} h \, d\mu < \lambda \cdot \int_{K_1} f^2 \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_{K_1} f \, d\mu = 0$$

erfüllt sowie  $K_1$  liegt in der Box  $[0, D] \times [0, \varepsilon]^{n-1}$  in einem geeigneten Koordinatensystem.

30

### Beweisskizze zur ersten Behauptung

Wir nehmen an, dass für ein  $j \geq 2$  der Körper  $K_j$  bereits eine schlechte Menge ist, die in  $[0, D]^j \times [0, \varepsilon]^{n-j}$  liegt und für die  $\int_{K_j} f d\mu = 0$  gilt, d.h. unsere schlechte Menge ist schon auf  $n - j$  Dimensionen eingeschränkt.

Der Induktionsanfang  $K_n = K$  ist selbstverständlich durch unsere Annahme (6) gegeben.

Für die Einschränkung entlang einer weiteren Dimension wird ein Divide-and-Conquer-Verfahren verwendet, welches wir hier nur grob ansehen werden.

31

### Beweisskizze: Divide-and-Conquer-Verfahren

- Betrachte eine Projektion  $R$  auf die ersten beiden *pastösen* Dimensionen.
- Wähle  $x \in \mathbb{R}$  so, dass jede Gerade durch  $x$  die Menge  $R$  in Gebiete mit jew. mind. einem Drittel der Gesamtfläche teilt. (So ein  $x$  existiert immer, ohne Beweis.)
- Wähle eine Hyperebene  $H$  durch  $x$  so, dass ihre Normale in  $R$  liegt und dass der Erwartungswert von  $f$  sowohl in  $K_j \cap H^+$  als auch in  $K_j \cap H^-$  gleich 0 ist. Beide Mengen sind dann ebenfalls schlecht.
- Setze dieses Verfahren auf eine diese Mengen fort, bis eine schlechte Menge mit Größe  $\frac{1}{2}\varepsilon^2$  erreicht wird.
- Die Größe in einer Richtung ist dann maximal  $\varepsilon$ . (geometrischer Fakt, ohne Beweis.)
- Führe einen Koordinatenwechsel durch, sodass eine der beiden Projektionsdimensionen maximal Größe  $\varepsilon$  hat.

Per Induktion erreichen wir so eine *platte* Menge  $K_1$ .

32

### Beh.: Schlechte Mengen sind noch platter!

Das oben besprochene Beweisverfahren kann leider die letzte Dimension nicht in eine  $\varepsilon$ -Box packen. Wir benötigen also einen neuen Ansatz für die letzte *pastöse* Dimension.

**Behauptung.** Seien  $K_1$ ,  $f$  und  $\delta$  wie oben und sei  $\eta = \frac{c_3 \delta}{\sqrt{n}}$  mit einer Konstanten  $c_3 > 0$ . Unter der Krümmungsbedingung (2) existiert eine konvexe Teilmenge  $K_0 \subseteq K_1$  mit

$$\int_{K_0} h d\mu < \frac{1}{10} \int_{K_0} (f - \bar{f})^2 d\mu \quad (8)$$

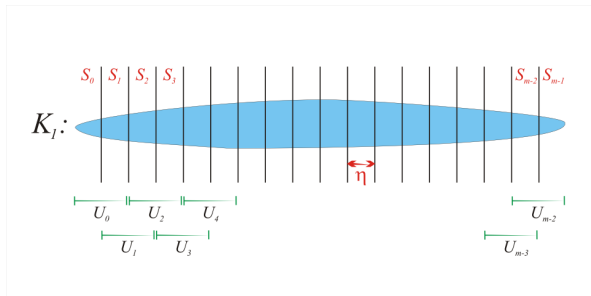
wobei  $\bar{f} = \frac{1}{\mu(K_0)} \int_{K_0} f d\mu$  analog zu oben definiert ist.

Ebenfalls gilt:  $K_0$  liegt in der Box  $[-\eta, \eta] \cdot [0, \varepsilon]^{n-1}$ .

33

### Beweisidee für die zweite Behauptung

Wir zerlegen  $K_1$  in  $m$  kleine Abschnitte und zeigen, dass mindestens einer dieser Abschnitte (oder die Vereinigung zweier benachbarter) die Ungleichung (8) erfüllt.



34

### Beweisidee für die zweite Behauptung

- $\int_{K_1} f^2 d\mu = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{S_i} (f - \bar{f}_i)^2 d\mu + \sum_{i=0}^{m-1} \mu(S_i) \bar{f}_i^2$
- $A :=$  erster Summand,  $B :=$  zweiter Summand.
- Wenn  $A > B$  gilt, folgt die Abschätzung schnell und es gilt sogar  $\lambda = O(n^2)$ .



- Für die Umkehrungen kann man zeigen, dass für die Vereinigungen  $U_k$  ebenfalls gilt: Eine globale große Varianz bedingt eine große lokale Varianz auf irgendeinem der  $U_k$ .

Der Beweis ist in Kapitel 6 der *Lecture Notes* von MARK JERRUM zu finden (Seiten 87-90).

35

### Abschluss des Beweises

Wir haben nun eine schlechte Menge  $K_0$  gefunden, die in einem  $2\eta$  langem Prisma eingeschlossen ist, dessen restliche Seiten einem  $(n-1)$ -dim. Würfel mit Seitenlänge  $\varepsilon$  entsprechen. Nun führen wir den Widerspruch herbei:

Sei  $C$  die Mittelachse des Prismas und seien  $z_1$  und  $z_2$  die Schnittpunkte von  $C$  mit den Seiten des Prismas. Wir setzen  $\delta' := \delta - \varepsilon\sqrt{n}$  und wählen  $\varepsilon$  so klein, dass

$$\text{Vol}_n B(0, \delta') \geq 0,9 \cdot \text{Vol}_n B(0, \delta).$$

Sei  $I := B(z_1, \delta') \cap B(z_2, \delta') \cap K$ . Durch Änderung der Wahl von  $c_3$  und damit Beeinflussung der Größe von  $\eta$  erreichen wir

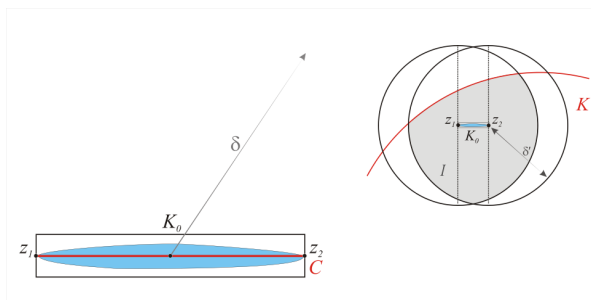
$$\text{Vol}_n B(z_1, \delta') \cap B(z_2, \delta') \geq 0,8 \cdot \text{Vol}_n B(0, \delta),$$

wie in der Rechnung zum zweiten Lemma. Daraus folgt dann:

$$\text{Vol}_n I \geq 0,2 \cdot \text{Vol}_n B(0, \delta). \quad (9)$$

36

### Graphik zum Beweisabschluss



37

### Abschluss des Beweises II

Eine Schlüsseleigenschaft von  $I$  ist also, dass es nicht zu klein ist. Die andere ist die Tatsache, dass jeder Punkt in  $I$  von jedem Punkt aus  $K_0$  in einem Schritt des ball walk erreicht werden kann. Nach Konstruktion gilt also

$$\sup\{\|x - y\| : x \in C \text{ und } y \in I\} \leq \delta',$$

woraus nach der Dreiecksungleichung folgt:

$$\sup\{\|x - y\| : x \in K_0 \text{ und } y \in I\} \leq \delta' + \varepsilon\sqrt{n} = \delta.$$

Da  $I \subseteq K$ , können wir hierfür auch schreiben:

$$I \subseteq B(x, \delta) \cap K \quad \text{für alle } x \in K_0. \quad (10)$$

38

### Abschluss des Beweises: Der Widerspruch

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{K_0} h \, d\mu &\geq \frac{1}{2} \int_{K_0} \frac{\mu(dx)}{\text{Vol}_n B(x, \delta) \cap K} \int_I (f(x) - f(y))^2 \, dy \quad (5),(10) \\
 &\geq \frac{1}{2 \text{Vol}_n B(0, \delta)} \int_{K_0} \mu(dx) \int_I (f(x) - f(y))^2 \, dy \\
 &\geq \frac{1}{2 \text{Vol}_n B(0, \delta)} \int_I dy \int_{K_0} (f(x) - f(y))^2 \mu(dx) \quad (\text{Fubini}) \\
 &\geq \frac{1}{2 \text{Vol}_n B(0, \delta)} \int_I dy \int_{K_0} (f - \bar{f})^2 \, d\mu \quad (\text{Varianzmin.}) \\
 &\geq \frac{1}{10} \int_{K_0} (f - \bar{f})^2 \, d\mu \quad (9)
 \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur zweiten Behauptung (8).

*qed.*

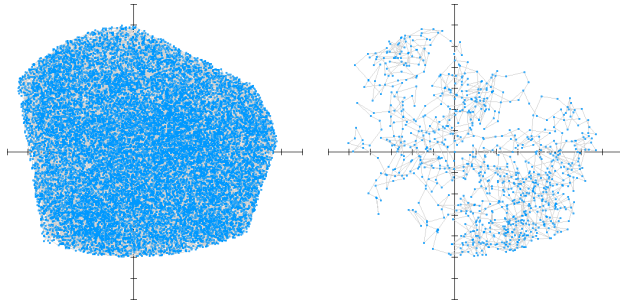
## 4 Anwendung und Ausblick

### 4.1 Implementierung

#### Das Verfahren in der praktischen Anwendung

Zwar ist das Verfahren explizit für hochdimensionale Anwendungen ausgelegt, dennoch werden hier der Anschauung wegen nur zwei- und dreidimensionale konvexe Körper betrachtet. Aus den am Anfang des Vortrags genannten Gründen kommt ausschließlich die Metropolis-Variante des Algorithmus für eine Implementierung in Frage. Ebenfalls vernachlässigen wir die Krümmungsbedingung, achten aber bei unseren Testkörpern darauf, dass keine spitzen Winkel auftreten.

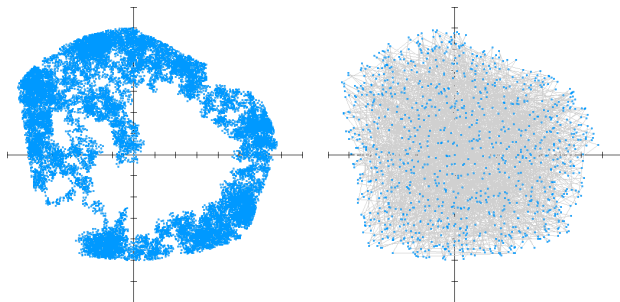
#### Funktionsweise I



$\delta = 1; n = 20.000$   
Gute Wahl...

$\delta = 1; n = 1.000$   
Zu wenig Schritte.

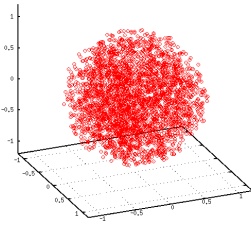
#### Funktionsweise II



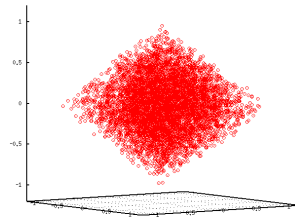
$\delta = 0,005; n = 20.000$   
Zu kleine Schrittweite.

$\delta = 5.000; n = 20.000$   
Zu große Schrittweite.

## Konvexe dreidimensionale Körper



Einheitskugel



Doppelpyramide

## 4.2 Volumenberechnung

### Von den Punkten zum Flächeninhalt

Um aus den erzeugten Punkten einen Flächeninhalt zu generieren, nutzen wir den Ansatz des *Anteilsprodukts*:

Sei der konvexe Körper  $K$  gegeben. Wir betrachten eine Serie konzentrischer Kugeln  $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_k$ , sodass  $B_0 \subseteq K$  und  $K \subseteq B_k$ . Weiterhin fordern wir, dass das Volumen nicht zu stark ansteigt, etwa  $\text{Vol}_n B_{i+1} \leq 2 \cdot \text{Vol}_n B_i$ . Wir können die Anteile

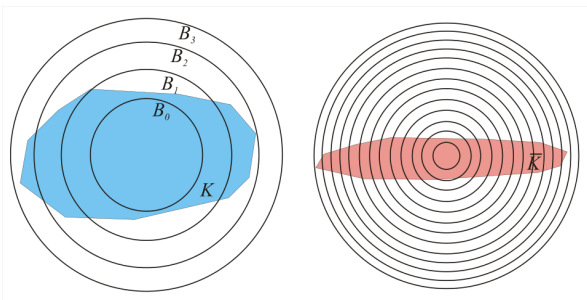
$$\rho_i = \frac{\text{Vol}_n B_i \cap K}{\text{Vol}_n B_{i+1} \cap K}$$

abschätzen durch wiederholtes Erzeugen von Punkten aus  $B_{i+1} \cap K$  und Bestimmen des Anteils dieser Punkte, die auch in  $B_i \cap K$  liegen.

Sei  $Z_i$  ein so erzeugter Schätzer für  $\rho_i$ . Dann erhalten wir eine Abschätzung des Volumens von  $K$  durch

$$\text{Vol}_n K \approx \text{Vol}_n B_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{Z_i}$$

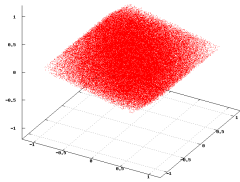
### Abbildung: Konzentrische Kugeln



$K$  annähernd rund  $\rightarrow$  wenig Kugeln  $\rightarrow$  gute Schätzung möglich.  
 $\bar{K}$  platt  $\rightarrow$  viele Kugeln  $\rightarrow$  große Ungenauigkeit!

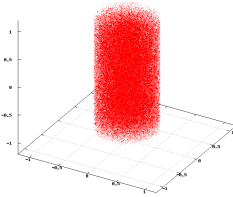
### Volumenberechnung zweier Testkörper

Estimating the volume of convex bodies (with type = D, n = 10000, delta = 0.1)



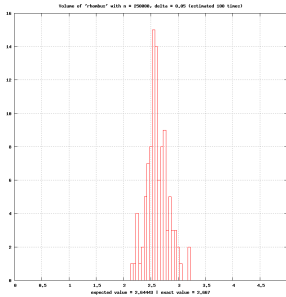
$\text{Vol}_{\text{exakt}} = 8/3 \approx 2,667$   
(Doppelpyramide)

Estimating the volume of convex bodies (with type = C, n = 10000, delta = 0.1)

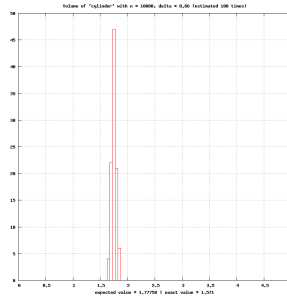


$\text{Vol}_{\text{exakt}} = \pi/2 \approx 1,571$   
(Zylinder)

### Volumenberechnung: Simulation



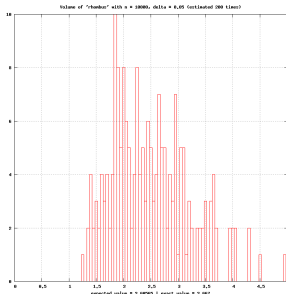
$\mathbb{E}[\text{Vol}] = 2,64443$   
(Doppelpyramide)



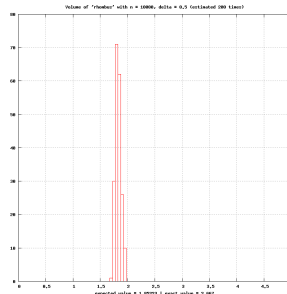
$\mathbb{E}[\text{Vol}] = 1,77758$   
(Zylinder)

### Wahl des richtigen $\delta$ ist essentiell!

Wir betrachten nun zwei Abschätzungen für die Doppelpyramide:



$\delta = 0.05; n = 10.000; m = 200$   
 $\mathbb{E}[\text{Vol}] = 2,60565$



$\delta = 0.5; n = 10.000; m = 200$   
 $\mathbb{E}[\text{Vol}] = 1,85223$

## 4.3 Ausblick

### Probleme in der Praxis

- Implementierung der Orakelfunktion.
- Wie groß ist der Durchmesser  $D$  des konvexen Körpers?
- Wo lässt man den *ball walk* starten?
- Wahl des richtigen  $\delta$ !
- Wegfall der Krümmungsbedingung (2)!
- Viele konzentrische Kugeln  $\rightarrow$  große Varianz  $\rightarrow$  große Fehler wahrscheinlich!
- Skalierung von  $K$ .

## Fazit

Es müssen weitere Informationen über den konvexen Körper  $K$  gegeben sein und das Verfahren je nach Beschaffenheit angepasst werden!

49

## Verwendung des Verfahrens

Die Berechnung hochdimensionaler Integrale über konvexe Mengen ist ein häufig auftretendes Problem in vielen mathematischen und außermathematischen Themenbereichen. Insbesondere erscheinen Fragestellungen dieser Art

- in der Finanzmathematik. [Risikooptimierung]
- in der Bayesschen Statistik.
- in der statistischen Physik. [Gibbs-Sampling]

50

## Und nächste Woche sehen wir...

Unter gewissen Voraussetzungen an die Eingabedaten können direkte Fehlerschranken sowohl für den reinen Monte Carlo- als auch den Metropolis-Algorithmus mit zugrundeliegendem *ball walk* angegeben werden.

Diese Fehlerschranken hängen von der Dimension  $d$ , der Schrittweite  $\delta$  des *ball walk* und einer Konstanten  $\alpha < 1$  aus den Voraussetzungen an die Eingabedaten ab.

Markus Burkow wird hierzu konkrete Fehlerschranken (insbesondere also obere Grenzen) für beide Algorithmen angeben sowie als zentrale Aussage für die Metropolisvariante die Abschätzung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e \left( S_n^\delta, (f, \rho) \right)^2 \cdot n \leq \frac{8 \cdot 1600^2}{81\pi} (d+1) \cdot \frac{e^{2\alpha\delta}}{\delta^2}$$

herleiten und somit das polynomielle Wachstum der Komplexität in  $d$ .

51

## 5 Literatur

### Schlußwort

Die Folien sowie eine textgleiche Druckversion (mit allen Abbildungen) dieses Vortrags sind auch im Internet abrufbar unter:

[www.grohganzt.de/stochastic.html](http://www.grohganzt.de/stochastic.html)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

52

### Literaturverzeichnis

- JERRUM, MARK mit ALEX BELOW und CHRISTOPH AMBÜHL:  
Lecture Notes of "Counting, sampling and integrating: algorithms and complexity",  
Kapitel 6.  
[homepages.inf.ed.ac.uk/mrj/ETHbook/chap6.ps](http://homepages.inf.ed.ac.uk/mrj/ETHbook/chap6.ps)
- FELLER, WILLIAM:  
An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol I, 2nd Edition.  
Wiley, 1964, New York.

53