

Räumlicher Poissonprozess

Seminar Zeitstetige Markovketten und Anwendungen

Prof. Dr. Roland M. Friedrich

Referent: Harald G. Grohgan

1 Inhaltsübersicht

Inhaltsverzeichnis

1 Inhaltsübersicht	1
2 Definitionen	1
2.1 Wiederholung: Poissonprozesse	1
2.2 Räumliche Poissonprozesse	2
3 Eigenschaften & Beispiele	3
3.1 Überlagerungssatz	3
3.2 Abbildungssatz	5
3.3 Konditionalität	6
3.4 Färbungssatz	7
4 Ausblick	8
4.1 Weitere Eigenschaften	8
4.2 Simulation	8
5 Literatur	9

2 Definitionen

2.1 Wiederholung: Poissonprozesse

Homogener Poissonprozess

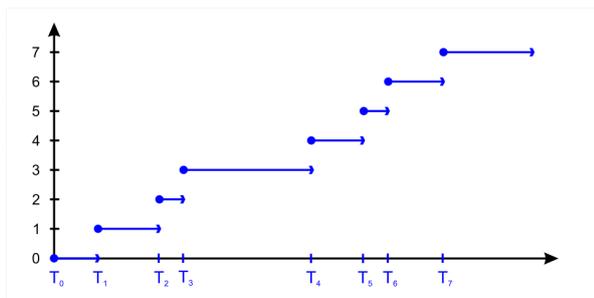
Ein (zeitlich) *homogener Poissonprozess* ist ein Punktprozess, d.h. eine abzählbare Menge T , deren Elemente eine Folge von nicht-negativen Zufallsvariablen $(T_n)_{n \geq 0}$ sind, mit

- $T_0 = 0$
- $T_0 < T_1 < T_2 < \dots$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$

in Kombination mit einem Zählprozess $N([a, b]) = |I_{(a, b]} \cap T|$

- Für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^+$ ist die Zufallsvariable $N([a, b])$ poissonverteilt mit Parameter $\lambda \cdot (b - a)$
- Die Zufallsvariablen $N([t_i, t_{i+1}])$, $t_i < t_{i+1}$ sind unabhängig.

Homogener Poissonprozess - Illustration



Inhomogener Poissonprozess

Betrachtet man λ nicht als Konstante, sondern als positive reellwertige Funktion, so erhält man einen *inhomogenen Poissonprozess*. Die Zufallsvariable $N([a, b])$ ist hier poissonverteilt mit Parameter $\Lambda_{a,b}$, wobei

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad t \mapsto \lambda(t) \quad \text{und}$$

$$\Lambda_{a,b} = \int_a^b \lambda(x) dx$$

gesetzt wird.

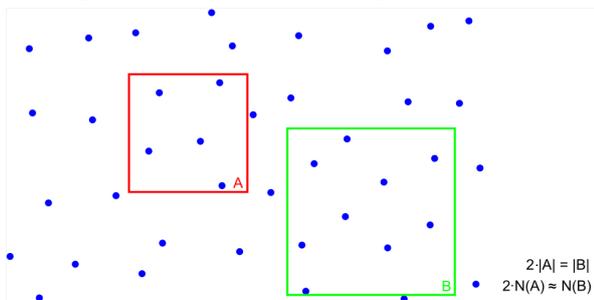
2.2 Räumliche Poissonprozesse

Homogener räumlicher Poissonprozess

Die abzählbare zufällige Menge $\Pi \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ wird *Poissonprozess* mit Intensität λ genannt, wenn für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Zufallsvariable $N(A) = |\Pi \cap A|$ folgende Bedingungen erfüllt:

- $N(A)$ ist poissonverteilt mit Parameter $\Lambda(A) := \lambda \cdot |A|$.
- Für disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sind $N(A_1), \dots, N(A_n)$ unabhängige Zufallsvariablen.

Homogener räumlicher Poissonprozess - Illustration



Inhomogener räumlicher Poissonprozess

Sei $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht negative, meßbare Funktion mit $\int_A \lambda(x) dx < \infty$ für alle beschränkten Mengen A .

Die abzählbare zufällige Menge $\Pi \subset \mathbb{R}^d$ wird *inhomogener Poissonprozess* mit Intensitätsfunktion $\lambda(x)$ genannt, wenn für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Zufallsvariable $N(A) = |\Pi \cap A|$ folgende Bedingungen erfüllt:

- $N(A)$ ist poissonverteilt mit Parameter $\Lambda(A) := \int_A \lambda(x) dx$.
- Für disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sind $N(A_1), \dots, N(A_n)$ unabhängige Zufallsvariablen.

Wir nennen die Funktion $\Lambda(A)$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *Intensitätsmaß* des Prozesses Π .

3 Eigenschaften & Beispiele

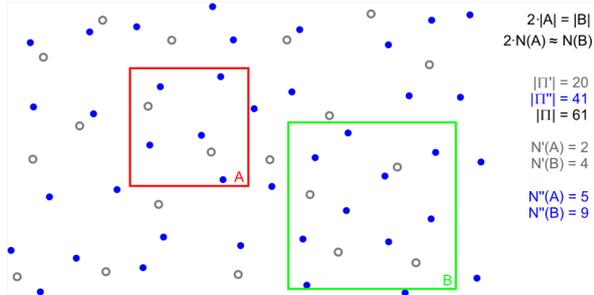
3.1 Überlagerungssatz

Überlagerungssatz

Für zwei unabhängige, inhomogene Poissonprozesse Π' und Π'' auf \mathbb{R}^d mit dazugehörigen Intensitätsfunktionen λ' und λ'' ist die Menge $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ wieder ein Poissonprozess mit der Intensitätsfunktion $\lambda = \lambda' + \lambda''$.

9

Überlagerungssatz - Illustration



10

Überlagerungssatz - Beweis

Sei $N'(A) = |\Pi' \cap A|$ und $N''(A) = |\Pi'' \cap A|$. Wir müssen zeigen, dass Π wieder ein Poissonprozess ist, also dass gilt:

- $N(A) = N'(A) + N''(A)$ ist poissonverteilt mit Parameter $\Lambda(A) = \Lambda'(A) + \Lambda''(A)$.
- Für disjunkte Mengen $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sind $N(A_1), \dots, N(A_n)$ unabhängige Zufallsvariablen. Insbesondere gilt tatsächlich $N(A) = |\Pi \cap A|$ für alle A , d.h. kein Punkt von Π' fällt mit einem Punkt von Π'' zusammen.

11

Überlagerungssatz - Beweis von a)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[N'(A) + N''(A) = n] &= \sum_{k=0}^n (\mathbb{P}[N'(A) = k] \cdot \mathbb{P}[N''(A) = n - k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{\Lambda'(A)^k}{k!} e^{-\Lambda'(A)} \cdot \frac{\Lambda''(A)^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\Lambda''(A)} \right) \\
 &= e^{-(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{\Lambda'(A)^k \cdot \Lambda''(A)^{(n-k)}}{k! \cdot (n-k)!} \\
 &= e^{-(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))} \cdot \frac{(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))^n}{n!} \\
 &= \mathbb{P}[N(A) = n]
 \end{aligned}$$

Damit ist Aussage a) bewiesen.

12

Überlagerungssatz - Beweis von b)

Dass $N(A_i)$ unabhängig für disjunkte A_1, A_2, \dots sind, folgt sofort aus der Tatsache, dass für alle i die Zufallsvariablen $N'(A_i)$ und $N''(A_i)$ unabhängig sind. (Summen unabh. Zufallsvariablen sind unabhängig.)

Da \mathbb{R}^d als abzählbare Vereinigung beschränkter Mengen betrachtet werden kann, genügt zum Zeigen von $N(A) = |\Pi \cap A|$, dass für jedes beschränkte $A \in \mathbb{R}^d$ fast sicher kein Punkt zu Π' und Π'' gehört. Hierfür definieren wir die n -Boxen.

13

Definition: n -Box

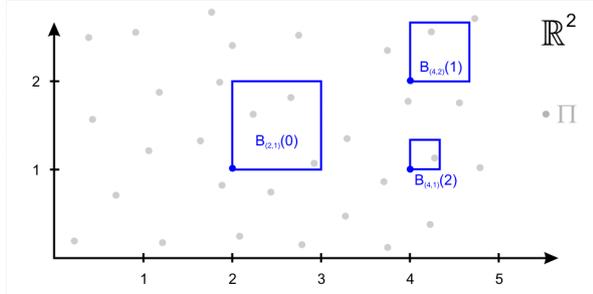
Sei $n \geq 1$ und für $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ sei

$$B_k(n) = \prod_{i=1}^d (k_i \cdot 2^{-n}, (k_i + 1) \cdot 2^{-n}]$$

die n -Box an der Position k .

14

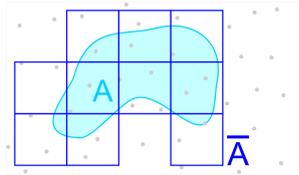
Illustration zu den n -Boxen



15

Überlagerungssatz - Beweis von b) (Fortsetzung)

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, und \bar{A} die Vereinigung aller $B_k(0)$, die A schneiden.



Die Wahrscheinlichkeit, dass A einen Punkt enthält, der zu Π' und Π'' gehört, ist für alle n beschränkt durch die Wahrscheinlichkeit, dass eine in \bar{A} liegende Box $B_k(n)$ solch einen Punkt enthält. Wir zeigen nun, dass diese Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt.

16

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\Pi' \cap \Pi'' \cap A \neq \emptyset] &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \mathbb{P}[N'(B_k(n)) \geq 1, N''(B_k(n)) \geq 1] \\ &= \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} (1 - e^{-\Lambda'(B_k(n))}) (1 - e^{-\Lambda''(B_k(n))}) \\ &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda'(B_k(n)) \Lambda''(B_k(n)) \quad (*) \\ &\leq \max_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \{\Lambda'(B_k(n))\} \cdot \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda''(B_k(n)) \\ &= M_n(A) \cdot \Lambda''(\bar{A}), \end{aligned}$$

wobei

$$M_n(A) = \max_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda'(B_k(n)).$$

(*) : $1 - e^{-x} \leq x$ für $x \geq 0$.

17

Da $\Lambda''(\bar{A}) < \infty$ nach Voraussetzung, verbleibt zum Abschluss des Beweises noch zu zeigen:

$$M_n(A) = \max_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda'(B_k(n)) \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Da für den Beweis des Abbildungssatzes eine etwas stärkere Aussage benötigt wird, zeigen wir stattdessen ein Lemma, aus dem die obige Aussage sofort folgt. *qed*

18

Lemma

Sei μ ein atomfreies Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, d.h. $\mu(\{y\}) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$. Sei $n \geq 1$ und $B_k(n)$ eine wie oben definierte n -Box.

Dann gilt für jede beschränkte Menge A :

$$\max_{k: B_k(n) \subseteq A} \mu(B_k(n)) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis des Lemmas

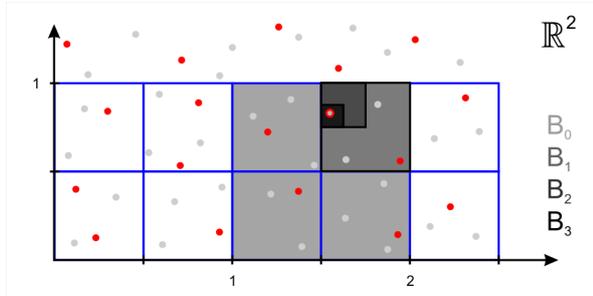
O.B.d.A. sei A eine endliche Vereinigung von 0-Boxen. Sei

$$M_n(A) = \max_{k: B_k(n) \subseteq A} \mu(B_k(n)).$$

Nach Konstruktion gilt: $M_n \geq M_{n+1}$.

Annahme: $M_n \not\rightarrow 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $M_n(A) > \delta$ für alle n , ebenso existiert für alle $n \geq 0$ eine n -Box $B_k(n) \subseteq A$ mit $\mu(B_k(n)) > \delta$. Wir färben eine m -Box schwarz, wenn für alle $n \geq m$ eine n -Box $C' \subseteq C$ existiert, sodass $\mu(C') > \delta$.

Schwarze n -Boxen - Illustration



Beweis des Lemmas (Fortsetzung)

Nun ist A die Vereinigung von endlich vielen $(0, 1]^d$, und sei B_0 eine derjenigen Boxen, für die gilt: Es existieren unendlich viele n , sodass B_0 eine n -Box B' mit $\mu(B') > \delta$ enthält.

Da μ monoton ist, ist die 0-Box B_0 schwarz. Durch ein ähnliches Argument enthält B_0 mindestens eine schwarze 1-Box B_1 . Durch Fortsetzung enthalten wir eine unendliche absteigende Folge B_0, B_1, \dots aus schwarzen Boxen mit $\mu(B_i) > \delta$ für alle i , woraus sich der Widerspruch

$$0 < \delta \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcap_i B_i\right) = \mu(\{y\}) = 0$$

ergibt. *qed*

3.2 Abbildungssatz

Abbildungssatz

Sei Π ein inhomogener Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Intensitätsfunktion λ , und sei $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$ eine Abbildung mit $\Lambda(f^{-1}(y)) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^s$. Weiterhin gelte für alle beschränkten Mengen B :

$$\mu(B) = \Lambda(f^{-1}B) = \int_{f^{-1}B} \lambda(x) dx < \infty$$

Dann ist $f(\Pi)$ ein inhomogener Poissonprozess auf \mathbb{R}^s mit Intensitätsmaß μ .

Beispiel zum Abbildungssatz: Polarkoordinaten

Sei Π Poissonprozess auf \mathbb{R}^2 mit konstanter Intensität λ und sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenfunktion $f(x, y) = (r, \theta)$ mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Da $\Lambda(f^{-1}(y)) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$ ist, folgt, dass $f(\Pi)$ ein Poissonprozeß auf \mathbb{R}^2 ist mit Intensitätsmaß

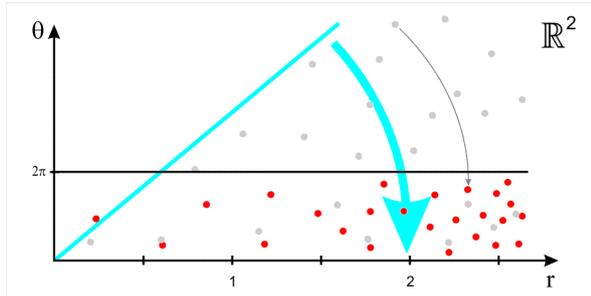
$$\mu(B) = \int_{f^{-1}B} \lambda \, dx \, dy = \int_{B \cap S} \lambda \cdot r \, dr \, d\theta,$$

wobei S der Streifen $\{(r, \theta) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ ist.

24

Beispiel zum Abbildungssatz: Polarkoordinaten

Wir können uns $f(\Pi)$ als Poissonprozess auf diesem Streifen mit Intensitätsfunktion λr vorstellen:



25

3.3 Konditionalität

Konditionalitätssatz

Sei $\Pi \subset \mathbb{R}^d$ ein inhomogener Poissonprozess mit Intensitätsfunktion λ , und sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 < \Lambda(A) < \infty$. Mit $|\Pi \cap A| = n$ gilt: Die n in A liegenden Punkte haben dieselbe Verteilung wie n unabhängige, zufällig gewählte Punkte in A bezüglich des W -maßes

$$\mathbb{Q}(B) = \frac{\Lambda(B)}{\Lambda(A)} \quad B \subseteq A.$$

Da $\mathbb{Q}(B) = \int_B \lambda(x) / \Lambda(A) \, dx$, ist $\lambda(x) / \Lambda(A)$ die Dichtefunktion für $x \in A$.

26

Bemerkung zum Konditionalitätssatz

Ist Π ein *homogener* Poissonprozess mit konstanter Intensität λ , so sind (unter der Bedingung $|\Pi \cap A| = n$) diese n fraglichen Punkte unabhängig gleichverteilt in A .

27

Beweis zur Konditionalität

Sei A_1, \dots, A_k eine Partition von A . Mit $n = n_1 + \dots + n_k$ folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k \mid N(A) = n) \\ &= \frac{\prod_i \mathbb{P}(N(A_i) = n_i)}{\mathbb{P}(N(A) = n)} \quad (\text{Unabhängigkeit}) \\ &= \frac{\prod_i \Lambda(A_i)^{n_i} e^{-\Lambda(A_i)} / n_i!}{\Lambda(A)^n e^{-\Lambda(A)} / n!} \\ &= \frac{n!}{\prod_i n_i!} \frac{e^{-\sum \Lambda(A_i)}}{e^{-\Lambda(A)}} \prod_i \mathbb{Q}(A_i)^{n_i} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \prod_i \mathbb{Q}(A_i)^{n_i} \end{aligned}$$

Dies ist die Multinomialverteilung, welche die Gleichverteilung von n zufällig aus A ausgewählten Punkten bezüglich des Maßes \mathbb{Q} beschreibt. *qed*

28

3.4 Färbungssatz

Färbungssatz - Umkehrung des Überlagerungssatzes

Sei Π ein inhomogener Poissonprozess mit Intensitätsfunktion $\lambda(x)$. Wir spalten nun Π auf, indem wir die Punkte von Π *unabhängig voneinander* einfärben:

Ein Punkt $x \in \Pi$ wird mit Wahrscheinlichkeit $p_1(x)$ grün gefärbt, ansonsten mit der Wahrscheinlichkeit $p_2(x) := 1 - p_1(x)$ rot.

Die Menge der grünen Punkte nennen wir Π_1 und die der roten Π_2 .

Dann sind Π_1 und Π_2 unabhängige Poissonprozesse mit Intensitätsfunktionen

$$p_1(x)\lambda(x) \quad \text{bzw.} \quad p_2(x)\lambda(x).$$

29

Beweis des Färbungssatzes

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\Lambda(A) < \infty$. Wenn $|\Pi \cap A| = n$, folgt nach dem Satz oben, dass diese Punkte unabhängig zufällig verteilt sind mit dem W'maß $\mathbb{Q}(B) = \Lambda(B)/\Lambda(A)$. Also gilt (wegen Unabhängigkeit), dass ein zufällig ausgewählter Punkt grün ist mit der W'keit

$$\bar{p}_1 = \int_A p_1(x) d\mathbb{Q}$$

bzw. rot mit W'keit $\bar{p}_2 = 1 - \bar{p}_1$.

Ebenso folgt aus dem Konditionalitätssatz: Die Anzahl der grünen Punkte N_1 und der roten Punkte N_2 sind binomialverteilt:

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2 \mid N(A) = n) = \frac{n!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \quad (n = n_1 + n_2),$$

und die Anzahl der grünen und roten Punkte sind unabhängig:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2) &= \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \cdot \frac{\Lambda(A)^{n_1+n_2} e^{-\Lambda(A)}}{(n_1 + n_2)!} \\ &= \frac{(\bar{p}_1 \Lambda(A))^{n_1} e^{-\bar{p}_1 \Lambda(A)}}{n_1!} \cdot \frac{(\bar{p}_2 \Lambda(A))^{n_2} e^{-\bar{p}_2 \Lambda(A)}}{n_2!} \\ &= \mathbb{P}[N_1 = n_1] \cdot \mathbb{P}[N_2 = n_2]. \end{aligned}$$

30

31

Aus der Definition von $\mathbb{Q}(B)$ folgt, dass diese poissonverteilt sind mit Parameter

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 \Lambda(A) &= \int_A p_1(x) \Lambda(A) d\mathbb{Q} = \int_A p_1(x) \lambda(x) dx, \\ \bar{p}_2 \Lambda(A) &= \int_A p_2(x) \Lambda(A) d\mathbb{Q} = \int_A p_2(x) \lambda(x) dx. \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit für disjunkte Mengen folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft von Π selbst. *qed*

32

Beispiele für Poissonprozesse

- Vorkommen von Sternen in einer Galaxis. Färbungssatz: Unterteilung in gelbe Sterne, rote Riesen, weiße Zwerge...
- Wetterereignisse wie Tornados. Färbungssatz: Unterteilung der Tornados nach Stärke. Überlagerungssatz: Kombination mit Erdbeben etc. in der Versicherungsbranche.
- Bären in Bayern (nach Edmund Stoiber) Färbungssatz: Unterteilung in „Schadbären“ und „Problembären“ etc.

33

4 Ausblick

4.1 Weitere Eigenschaften

Abstandswahrscheinlichkeit zweier Punkte im \mathbb{R}^2 :

Sei ein zweidimensionaler Poissonprozess mit Intensität λ gegeben, wir untersuchen nun die Entfernung D zwischen einem Punkt A und seinem nächstgelegenen Nachbarn.

Für $x > 0$ gilt:

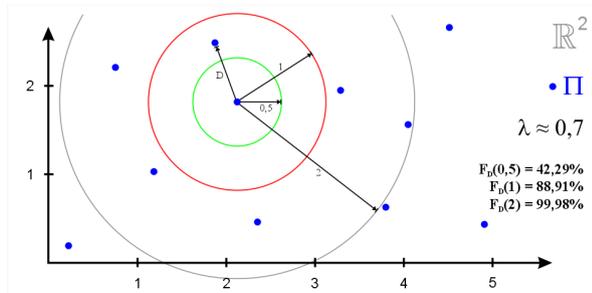
$$\begin{aligned} F_D(x) &:= \mathbb{P}(D \leq x) = 1 - \mathbb{P}(D > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{Kein Punkt auf dem Kreis um } A \text{ mit Fläche } \pi x^2) \\ &= 1 - e^{-\lambda \pi x^2} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Dichtefunktion

$$f_D(x) := \frac{d}{dx} F_D(x) = 2\lambda \pi x \cdot e^{-\lambda \pi x^2}.$$

34

Illustration



35

Abstandswahrscheinlichkeit im \mathbb{R}^3 :

Analog erhalten wir im dreidimensionalen Fall für $x > 0$:

$$F_D(x) = 1 - e^{-\lambda \frac{4\pi}{3} x^3}$$

und

$$f_D(x) = \frac{d}{dx} F_D(x) = 4\lambda \pi x^2 \cdot e^{-\lambda \frac{4\pi}{3} x^3}.$$

36

4.2 Simulation

Simulation poissonverteilter Punkte im \mathbb{R}^2

EINGABE: Parameter $\lambda > 0$, Größe $n \in \mathbb{N}$. **AUSGABE:** Poissonprozess auf $[0, n]^2$ mit konstanter Intensität λ .

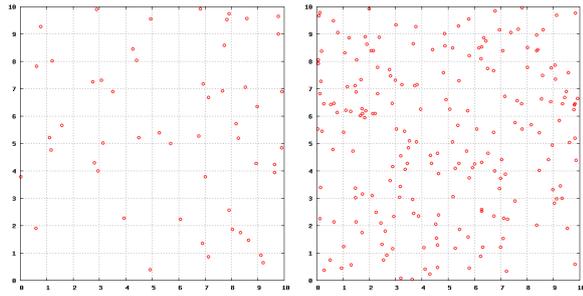
1. Erzeuge n^2 poissonverteilte Zufallsvariablen N_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$.
2. Für $i, j = 1, \dots, n$: Erzeuge N_{ij} unabh., gleichvert. Zufallsvariablen aus $(0, 1)^2$. Verschiebe diese um (i, j) .

Erzeugung einer poissonverteilten Zufallsvariable:

1. Setze $L := e^{-\lambda}$, $p := 1$, $k := 0$.
2. Solange $p \geq L$: $k = k + 1$ $p = p \cdot \text{rand}$, wobei rand i.i.d. aus $(0, 1)$
3. Übergebe $k - 1$.

37

Variation des Parameters λ



$\lambda = 0,5 : |\Pi| = 53$

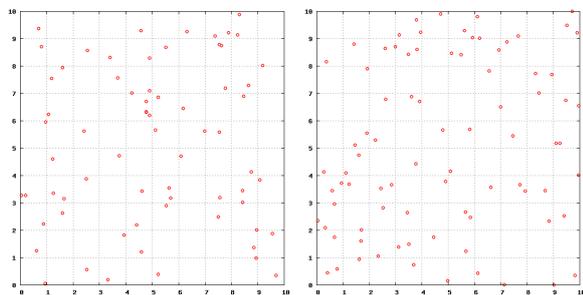
Abstandsmedian: 0,664

$\lambda = 2 : |\Pi| = 206$

Abstandsmedian: 0,332

38

Zwei Prozesse mit gleichem λ



$\lambda = 0,7 : |\Pi| = 68$

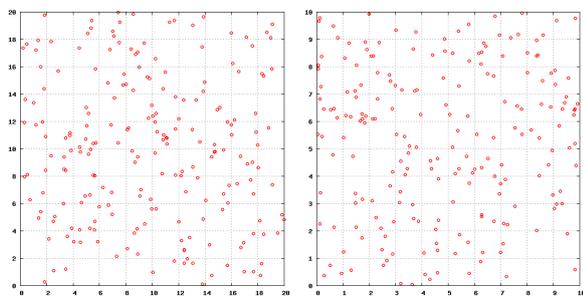
Abstandsmedian: 0,561

$\lambda = 0,7 : |\Pi| = 83$

Abstandsmedian: 0,561

39

Variation von λ und Skalierung



$\lambda = 0,5 : |\Pi| = 211$

Abstandsmedian: 0,664/2

$\lambda = 2 : |\Pi| = 206$

Abstandsmedian: 0,332

40

5 Literatur

Schlußwort

Die Folien sowie eine textgleiche Druckversion (mit allen Abbildungen) dieses Vortrags sind auch im Internet abrufbar unter:

www.bluesquaregroup.de/studium/grohganzen/inhalte.php

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

41

Literaturverzeichnis

- GRIMMET, GEOFFREY und DAVID STIRZAKER:
Probability and Random Processes.
Oxford University Press, 2001.
- KNUTH, DONALD
Seminumerical Algorithms, The Art of Computer Programming.
Addison Wesley, 1969.
zitiert in:
en.wikipedia.org/Poisson_distribution
- Course 7440, Section 2, Stochastic Simulation, Presentation 11:
Spatial Poisson Process
Institut of Applied Mathematics, University of Colorado, Fall 2004
amath.colorado.edu/courses/7400/2004fall/002/Web/SS-11.ppt