

# Räumlicher Poissonprozess

Seminar Zeitstetige Markovketten und Anwendungen

Prof. Dr. Roland Friedrich  
Referent: Harald G. Grohganz

## Inhaltsübersicht

### Definitionen

Wiederholung: Poissonprozesse  
Räumliche Poissonprozesse

### Eigenschaften & Beispiele

Überlagerungssatz  
Abbildungssatz  
Konditionalität  
Färbungssatz

### Ausblick

Weitere Eigenschaften  
Simulation

### Literatur

# Homogener Poissonprozess

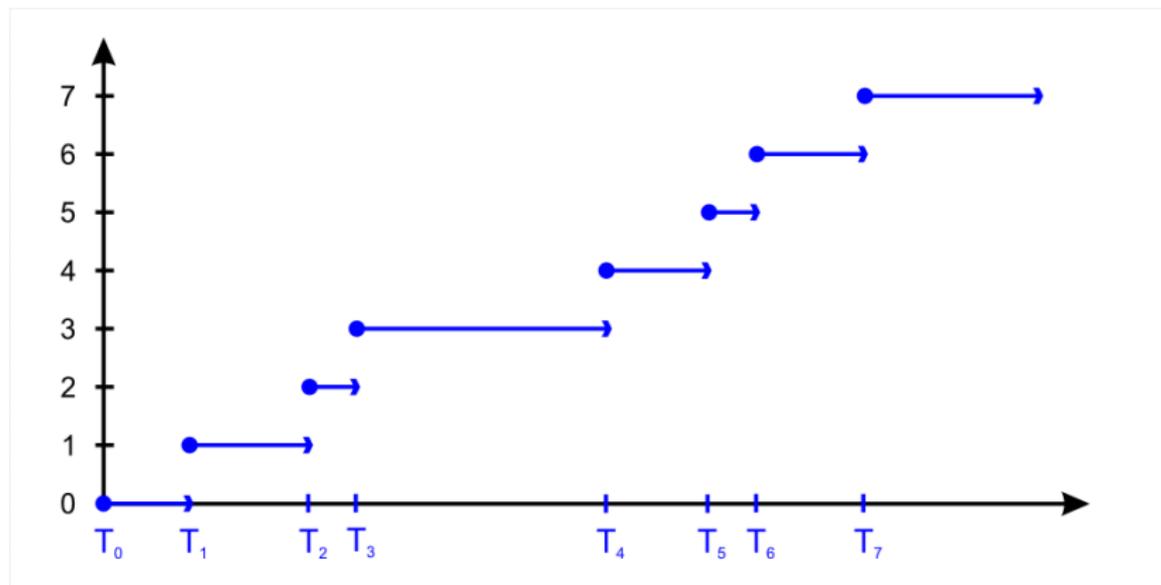
Ein (zeitlich) *homogener Poissonprozess* ist ein Punktprozess, d.h. eine abzählbare Menge  $T$ , deren Elemente eine Folge von nicht-negativen Zufallsvariablen  $(T_n)_{n \geq 0}$  sind, mit

- ▶  $T_0 = 0$
- ▶  $T_0 < T_1 < T_2 < \dots$
- ▶  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$

in Kombination mit einem Zählprozess  $N([a, b]) = |I_{(a,b]} \cap T|$

- ▶ Für alle  $(a, b] \in \mathbb{R}^+$  ist die Zufallsvariable  $N([a, b])$  poissonverteilt mit Parameter  $\lambda \cdot (b - a)$
- ▶ Die Zufallsvariablen  $N([t_i, t_{i+1}])$ ,  $t_i < t_{i+1}$  sind unabhängig.

# Homogener Poissonprozess - Illustration



# Inhomogener Poissonprozess

Betrachtet man  $\lambda$  nicht als Konstante, sondern als positive reellwertige Funktion, so erhält man einen *inhomogenen Poissonprozess*. Die Zufallsvariable  $N([a, b])$  ist hier poissonverteilt mit Parameter  $\Lambda_{a,b}$ , wobei

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad t \mapsto \lambda(t) \quad \text{und}$$
$$\Lambda_{a,b} = \int_a^b \lambda(x) dx$$

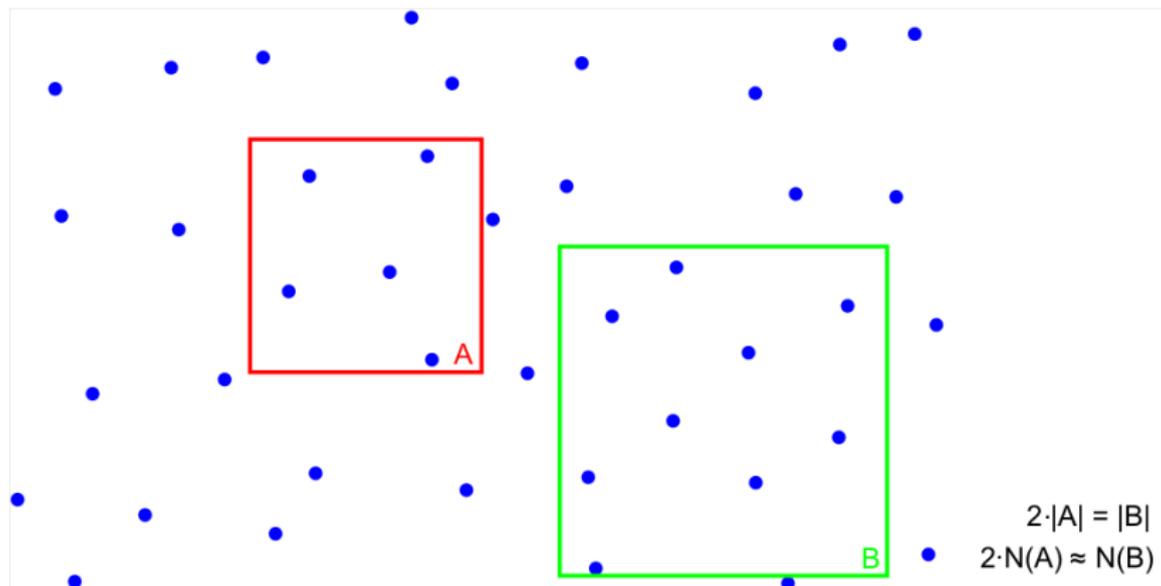
gesetzt wird.

# Homogener räumlicher Poissonprozess

Die abzählbare zufällige Menge  $\Pi \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$  wird *Poissonprozess* mit Intensität  $\lambda$  genannt, wenn für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  die Zufallsvariable  $N(A) = |\Pi \cap A|$  folgende Bedingungen erfüllt:

- $N(A)$  ist poissonverteilt mit Parameter  $\Lambda(A) := \lambda \cdot |A|$ .
- Für disjunkte Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  sind  $N(A_1), \dots, N(A_n)$  unabhängige Zufallsvariablen.

# Homogener räumlicher Poissonprozess - Illustration



# Inhomogener räumlicher Poissonprozess

Sei  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht negative, meßbare Funktion mit  $\int_A \lambda(x) dx < \infty$  für alle beschränkten Mengen  $A$ .

Die abzählbare zufällige Menge  $\Pi \subset \mathbb{R}^d$  wird *inhomogener Poissonprozess* mit Intensitätsfunktion  $\lambda(x)$  genannt, wenn für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  die Zufallsvariable  $N(A) = |\Pi \cap A|$  folgende Bedingungen erfüllt:

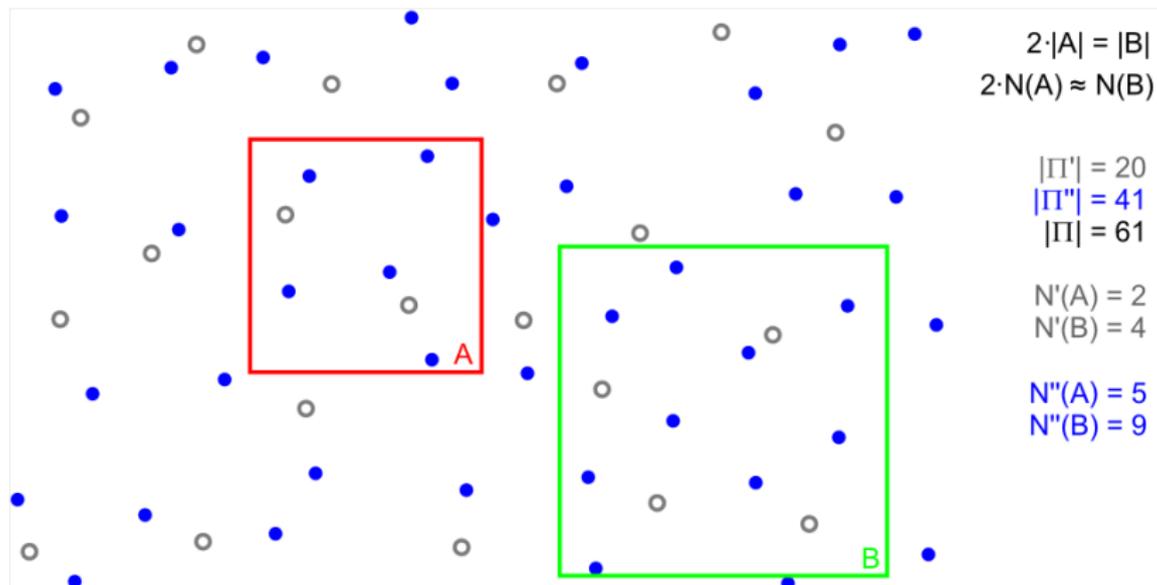
- $N(A)$  ist poissonverteilt mit Parameter  $\Lambda(A) := \int_A \lambda(x) dx$ .
- Für disjunkte Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  sind  $N(A_1), \dots, N(A_n)$  unabhängige Zufallsvariablen.

Wir nennen die Funktion  $\Lambda(A)$  für  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  *Intensitätsmaß* des Prozesses  $\Pi$ .

# Überlagerungssatz

Für zwei unabhängige, inhomogene Poissonprozesse  $\Pi'$  und  $\Pi''$  auf  $\mathbb{R}^d$  mit dazugehörigen Intensitätsfunktionen  $\lambda'$  und  $\lambda''$  ist die Menge  $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$  wieder ein Poissonprozess mit der Intensitätsfunktion  $\lambda = \lambda' + \lambda''$ .

# Überlagerungssatz - Illustration



# Überlagerungssatz - Beweis

Sei  $N'(A) = |\Pi' \cap A|$  und  $N''(A) = |\Pi'' \cap A|$ . Wir müssen zeigen, dass  $\Pi$  wieder ein Poissonprozess ist, also dass gilt:

- $N(A) = N'(A) + N''(A)$  ist poissonverteilt mit Parameter  $\Lambda(A) = \Lambda'(A) + \Lambda''(A)$ .
- Für disjunkte Mengen  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  sind  $N(A_1), \dots, N(A_n)$  unabhängige Zufallsvariablen.

Insbesondere gilt tatsächlich  $N(A) = |\Pi \cap A|$  für alle  $A$ , d.h. kein Punkt von  $\Pi'$  fällt mit einem Punkt von  $\Pi''$  zusammen.

# Überlagerungssatz - Beweis von a)

$$\mathbb{P}[N'(A) + N''(A) = n] = \sum_{k=0}^n (\mathbb{P}[N'(A) = k] \cdot \mathbb{P}[N''(A) = n - k])$$

# Überlagerungssatz - Beweis von a)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[N'(A) + N''(A) = n] &= \sum_{k=0}^n (\mathbb{P}[N'(A) = k] \cdot \mathbb{P}[N''(A) = n - k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{\Lambda'(A)^k}{k!} e^{-\Lambda'(A)} \cdot \frac{\Lambda''(A)^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\Lambda''(A)} \right)
 \end{aligned}$$

# Überlagerungssatz - Beweis von a)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[N'(A) + N''(A) = n] &= \sum_{k=0}^n (\mathbb{P}[N'(A) = k] \cdot \mathbb{P}[N''(A) = n - k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{\Lambda'(A)^k}{k!} e^{-\Lambda'(A)} \cdot \frac{\Lambda''(A)^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\Lambda''(A)} \right) \\
 &= e^{-(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{\Lambda'(A)^k \cdot \Lambda''(A)^{(n-k)}}{k! \cdot (n-k)!}
 \end{aligned}$$

# Überlagerungssatz - Beweis von a)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[N'(A) + N''(A) = n] &= \sum_{k=0}^n (\mathbb{P}[N'(A) = k] \cdot \mathbb{P}[N''(A) = n - k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{\Lambda'(A)^k}{k!} e^{-\Lambda'(A)} \cdot \frac{\Lambda''(A)^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\Lambda''(A)} \right) \\
 &= e^{-(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{\Lambda'(A)^k \cdot \Lambda''(A)^{(n-k)}}{k! \cdot (n-k)!} \\
 &= e^{-(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))} \cdot \frac{(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))^n}{n!}
 \end{aligned}$$

# Überlagerungssatz - Beweis von a)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[N'(A) + N''(A) = n] &= \sum_{k=0}^n (\mathbb{P}[N'(A) = k] \cdot \mathbb{P}[N''(A) = n - k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{\Lambda'(A)^k}{k!} e^{-\Lambda'(A)} \cdot \frac{\Lambda''(A)^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\Lambda''(A)} \right) \\
 &= e^{-(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{\Lambda'(A)^k \cdot \Lambda''(A)^{(n-k)}}{k! \cdot (n-k)!} \\
 &= e^{-(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))} \cdot \frac{(\Lambda'(A) + \Lambda''(A))^n}{n!} \\
 &= \mathbb{P}[N(A) = n]
 \end{aligned}$$

Damit ist Aussage a) bewiesen.

# Überlagerungssatz - Beweis von b)

Dass  $N(A_i)$  unabhängig für disjunkte  $A_1, A_2, \dots$  sind, folgt sofort aus der Tatsache, dass für alle  $i$  die Zufallsvariablen  $N'(A_i)$  und  $N''(A_i)$  unabhängig sind. (Summen unabh. Zufallsvariablen sind unabhängig.)

Da  $\mathbb{R}^d$  als abzählbare Vereinigung beschränkter Mengen betrachtet werden kann, genügt zum Zeigen von  $N(A) = |\Pi \cap A|$ , dass für jedes beschränkte  $A \in \mathbb{R}^d$  fast sicher *kein* Punkt zu  $\Pi'$  und  $\Pi''$  gehört. Hierfür definieren wir die  $n$ -Boxen.

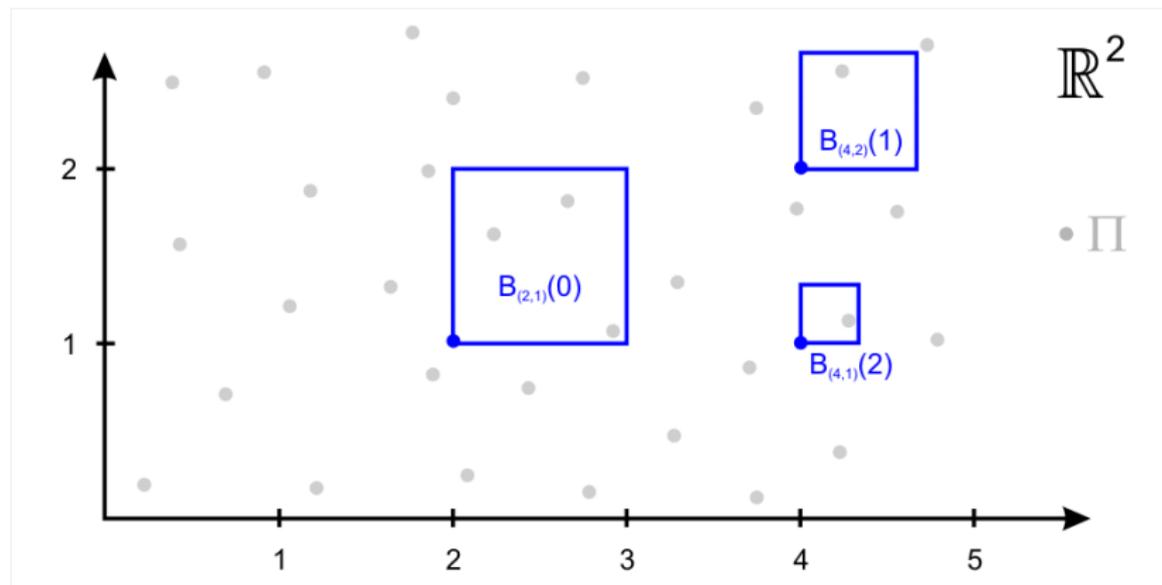
## Definition: $n$ -Box

Sei  $n \geq 1$  und für  $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$  sei

$$B_k(n) = \prod_{i=1}^d (k_i \cdot 2^{-n}, (k_i + 1) \cdot 2^{-n}]$$

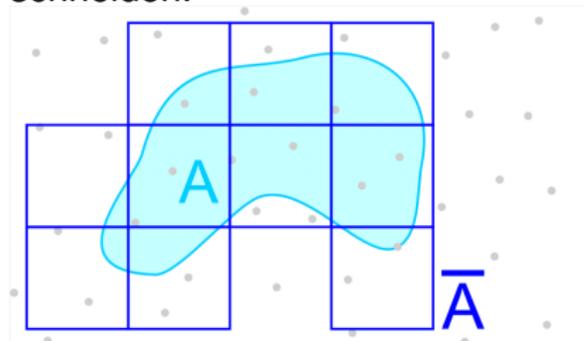
die  $n$ -Box an der Position  $k$ .

# Illustration zu den $n$ -Boxen



# Überlagerungssatz - Beweis von b) (Fortsetzung)

Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt, und  $\bar{A}$  die Vereinigung aller  $B_k(0)$ , die  $A$  schneiden.



Die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  einen Punkt enthält, der zu  $\Pi'$  und  $\Pi''$  gehört, ist für alle  $n$  beschränkt durch die Wahrscheinlichkeit, dass eine in  $\bar{A}$  liegende Box  $B_k(n)$  solch einen Punkt enthält. Wir zeigen nun, dass diese Wahrscheinlichkeit für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt.

$$\mathbb{P}[\Pi' \cap \Pi'' \cap A \neq \emptyset] \leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \mathbb{P}[N'(B_k(n)) \geq 1, N''(B_k(n)) \geq 1]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\Pi' \cap \Pi'' \cap A \neq \emptyset] &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \mathbb{P}[N'(B_k(n)) \geq 1, N''(B_k(n)) \geq 1] \\ &= \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \left(1 - e^{-\Lambda'(B_k(n))}\right) \left(1 - e^{-\Lambda''(B_k(n))}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\Pi' \cap \Pi'' \cap A \neq \emptyset] &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \mathbb{P}[N'(B_k(n)) \geq 1, N''(B_k(n)) \geq 1] \\
 &= \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \left(1 - e^{-\Lambda'(B_k(n))}\right) \left(1 - e^{-\Lambda''(B_k(n))}\right) \\
 &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda'(B_k(n)) \Lambda''(B_k(n)) \quad (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\Pi' \cap \Pi'' \cap A \neq \emptyset] &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \mathbb{P}[N'(B_k(n)) \geq 1, N''(B_k(n)) \geq 1] \\
 &= \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \left(1 - e^{-\Lambda'(B_k(n))}\right) \left(1 - e^{-\Lambda''(B_k(n))}\right) \\
 &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda'(B_k(n)) \Lambda''(B_k(n)) \quad (*) \\
 &\leq \max_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \{\Lambda'(B_k(n))\} \cdot \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda''(B_k(n))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\Pi' \cap \Pi'' \cap A \neq \emptyset] &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \mathbb{P}[N'(B_k(n)) \geq 1, N''(B_k(n)) \geq 1] \\ &= \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \left(1 - e^{-\Lambda'(B_k(n))}\right) \left(1 - e^{-\Lambda''(B_k(n))}\right) \\ &\leq \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda'(B_k(n)) \Lambda''(B_k(n)) \quad (*) \\ &\leq \max_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \{\Lambda'(B_k(n))\} \cdot \sum_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda''(B_k(n)) \\ &= M_n(A) \cdot \Lambda''(\bar{A}),\end{aligned}$$

wobei

$$M_n(A) = \max_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda'(B_k(n)).$$

(\*) :  $1 - e^{-x} \leq x$  für  $x \geq 0$ .

Da  $\Lambda''(\bar{A}) < \infty$  nach Voraussetzung, verbleibt zum Abschluss des Beweises noch zu zeigen:

$$M_n(A) = \max_{k: B_k(n) \subseteq \bar{A}} \Lambda'(B_k(n)) \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Da für den Beweis des Abbildungssatzes eine etwas stärkere Aussage benötigt wird, zeigen wir stattdessen ein Lemma, aus dem die obige Aussage sofort folgt. *qed*

# Lemma

Sei  $\mu$  ein atomfreies Maß auf  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ , d.h.  $\mu(\{y\}) = 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}^d$ . Sei  $n \geq 1$  und  $B_k(n)$  eine wie oben definierte  $n$ -Box.  
 Dann gilt für jede beschränkte Menge  $A$ :

$$\max_{k: B_k(n) \subseteq A} \mu(B_k(n)) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

# Beweis des Lemmas

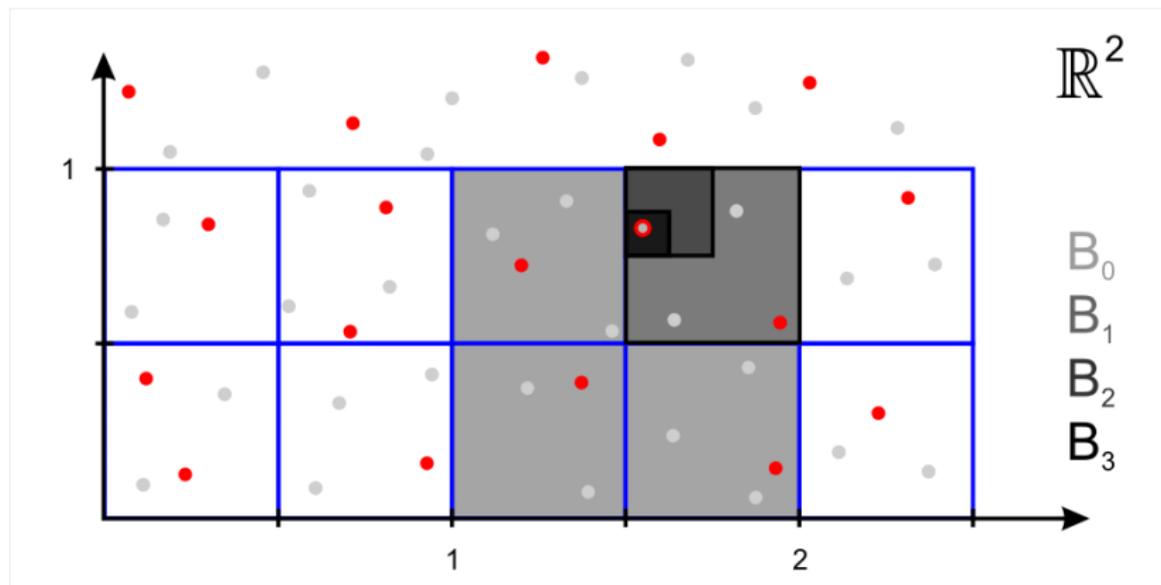
O.B.d.A. sei  $A$  eine endliche Vereinigung von 0-Boxen. Sei

$$M_n(A) = \max_{k: B_k(n) \subseteq A} \mu(B_k(n)).$$

Nach Konstruktion gilt:  $M_n \geq M_{n+1}$ .

Annahme:  $M_n \not\rightarrow 0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $M_n(A) > \delta$  für alle  $n$ , ebenso existiert für alle  $n \geq 0$  eine  $n$ -Box  $B_k(n) \subseteq A$  mit  $\mu(B_k(n)) > \delta$ . Wir färben eine  $m$ -Box schwarz, wenn für alle  $n \geq m$  eine  $n$ -Box  $C' \subseteq C$  existiert, sodass  $\mu(C') > \delta$ .

# Schwarze $n$ -Boxen - Illustration



## Beweis des Lemmas (Fortsetzung)

Nun ist  $A$  die Vereinigung von endlich vielen  $(0, 1]^d$ , und sei  $B_0$  eine derjenigen Boxen, für die gilt: Es existieren unendlich viele  $n$ , sodass  $B_0$  eine  $n$ -Box  $B'$  mit  $\mu(B') > \delta$  enthält.

Da  $\mu$  monoton ist, ist die 0-Box  $B_0$  schwarz. Durch ein ähnliches Argument enthält  $B_0$  mindestens eine schwarze 1-Box  $B_1$ . Durch Fortsetzung enthalten wir eine unendliche absteigende Folge  $B_0, B_1, \dots$  aus schwarzen Boxen mit  $\mu(B_i) > \delta$  für alle  $i$ , woraus sich der Widerspruch

$$0 < \delta \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcap_i B_i\right) = \mu(\{y\}) = 0$$

ergibt. *qed*

# Abbildungssatz

Sei  $\Pi$  ein inhomogener Poissonprozess auf  $\mathbb{R}^d$  mit Intensitätsfunktion  $\lambda$ , und sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$  eine Abbildung mit  $\Lambda(f^{-1}(y)) = 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}^s$ . Weiterhin gelte für alle beschränkten Mengen  $B$ :

$$\mu(B) = \Lambda(f^{-1}B) = \int_{f^{-1}B} \lambda(x) dx < \infty$$

Dann ist  $f(\Pi)$  ein inhomogener Poissonprozess auf  $\mathbb{R}^s$  mit Intensitätsmaß  $\mu$ .

## Beispiel zum Abbildungssatz: Polarkoordinaten

Sei  $\Pi$  Poissonprozess auf  $\mathbb{R}^2$  mit konstanter Intensität  $\lambda$  und sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Polarkoordinatenfunktion  $f(x, y) = (r, \theta)$  mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right).$$

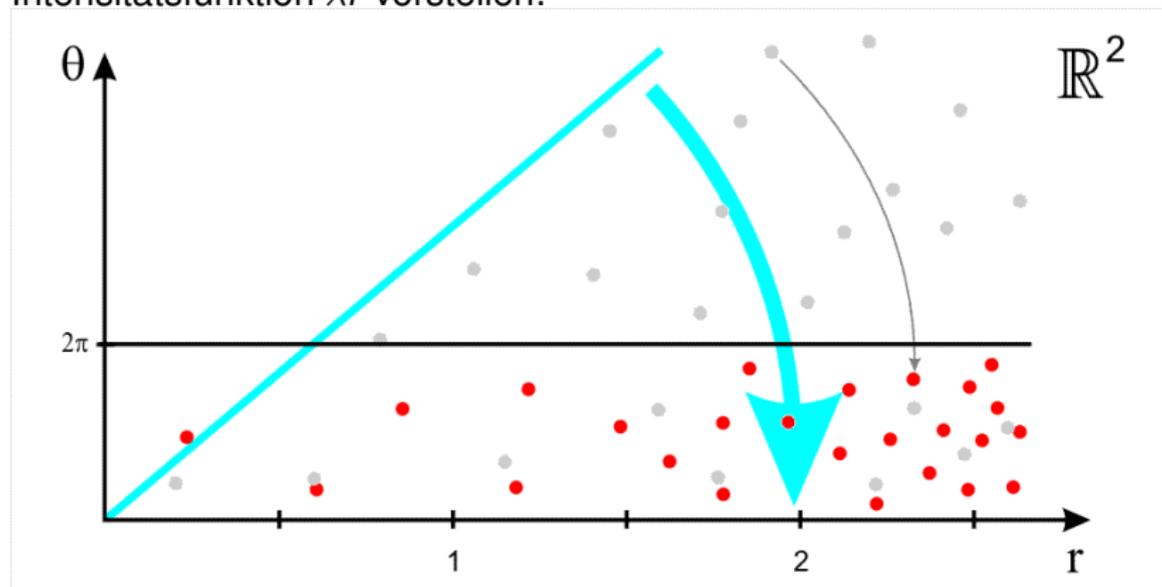
Da  $\Lambda(f^{-1}(y)) = 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}^2$  ist, folgt, dass  $f(\Pi)$  ein Poissonprozeß auf  $\mathbb{R}^2$  ist mit Intensitätsmaß

$$\mu(B) = \int_{f^{-1}B} \lambda \, dx \, dy = \int_{B \cap S} \lambda \cdot r \, dr \, d\theta,$$

wobei  $S$  der Streifen  $\{(r, \theta) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  ist.

# Beispiel zum Abbildungssatz: Polarkoordinaten

Wir können uns  $f(\Pi)$  als Poissonprozess auf diesem Streifen mit Intensitätsfunktion  $\lambda r$  vorstellen:



# Konditionalitätssatz

Sei  $\Pi \subset \mathbb{R}^d$  ein inhomogener Poissonprozess mit Intensitätsfunktion  $\lambda$ , und sei  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \Lambda(A) < \infty$ . Mit  $|\Pi \cap A| = n$  gilt: Die  $n$  in  $A$  liegenden Punkte haben dieselbe Verteilung wie  $n$  unabhängige, zufällig gewählte Punkte in  $A$  bezüglich des  $W$ -maßes

$$\mathbb{Q}(B) = \frac{\Lambda(B)}{\Lambda(A)} \quad B \subseteq A.$$

Da  $\mathbb{Q}(B) = \int_B \lambda(x)/\Lambda(A) dx$ , ist  $\lambda(x)/\Lambda(A)$  die Dichtefunktion für  $x \in A$ .

# Bemerkung zum Konditionalitätssatz

Ist  $\Pi$  ein *homogener* Poissonprozess mit konstanter Intensität  $\lambda$ , so sind (unter der Bedingung  $|\Pi \cap A| = n$ ) diese  $n$  fraglichen Punkte unabhängig gleichverteilt in  $A$ .

# Beweis zur Konditionalität

Sei  $A_1, \dots, A_k$  eine Partition von  $A$ . Mit  $n = n_1 + \dots + n_k$  folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k \mid N(A) = n) \\ &= \frac{\prod_i \mathbb{P}(N(A_i) = n_i)}{\mathbb{P}(N(A) = n)} \quad (\text{Unabhängigkeit}) \end{aligned}$$

# Beweis zur Konditionalität

Sei  $A_1, \dots, A_k$  eine Partition von  $A$ . Mit  $n = n_1 + \dots + n_k$  folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k \mid N(A) = n) \\ &= \frac{\prod_i \mathbb{P}(N(A_i) = n_i)}{\mathbb{P}(N(A) = n)} \quad (\text{Unabhängigkeit}) \\ &= \frac{\prod_i \Lambda(A_i)^{n_i} e^{-\Lambda(A_i)} / n_i!}{\Lambda(A)^n e^{-\Lambda(A)} / n!} \end{aligned}$$

# Beweis zur Konditionalität

Sei  $A_1, \dots, A_k$  eine Partition von  $A$ . Mit  $n = n_1 + \dots + n_k$  folgt:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k \mid N(A) = n) \\
 &= \frac{\prod_i \mathbb{P}(N(A_i) = n_i)}{\mathbb{P}(N(A) = n)} \quad (\text{Unabhängigkeit}) \\
 &= \frac{\prod_i \Lambda(A_i)^{n_i} e^{-\Lambda(A_i)} / n_i!}{\Lambda(A)^n e^{-\Lambda(A)} / n!} \\
 &= \frac{n!}{\prod_i n_i!} \frac{e^{-\sum \Lambda(A_i)}}{e^{-\Lambda(A)}} \prod_i Q(A_i)^{n_i}
 \end{aligned}$$

# Beweis zur Konditionalität

Sei  $A_1, \dots, A_k$  eine Partition von  $A$ . Mit  $n = n_1 + \dots + n_k$  folgt:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k \mid N(A) = n) \\
 &= \frac{\prod_i \mathbb{P}(N(A_i) = n_i)}{\mathbb{P}(N(A) = n)} \quad (\text{Unabhängigkeit}) \\
 &= \frac{\prod_i \Lambda(A_i)^{n_i} e^{-\Lambda(A_i)} / n_i!}{\Lambda(A)^n e^{-\Lambda(A)} / n!} \\
 &= \frac{n!}{\prod_i n_i!} \frac{e^{-\sum \Lambda(A_i)}}{e^{-\Lambda(A)}} \prod_i \mathbb{Q}(A_i)^{n_i} \\
 &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \prod_i \mathbb{Q}(A_i)^{n_i}
 \end{aligned}$$

# Beweis zur Konditionalität

Sei  $A_1, \dots, A_k$  eine Partition von  $A$ . Mit  $n = n_1 + \dots + n_k$  folgt:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k \mid N(A) = n) \\
 &= \frac{\prod_i \mathbb{P}(N(A_i) = n_i)}{\mathbb{P}(N(A) = n)} \quad (\text{Unabhängigkeit}) \\
 &= \frac{\prod_i \Lambda(A_i)^{n_i} e^{-\Lambda(A_i)} / n_i!}{\Lambda(A)^n e^{-\Lambda(A)} / n!} \\
 &= \frac{n!}{\prod_i n_i!} \frac{e^{-\sum \Lambda(A_i)}}{e^{-\Lambda(A)}} \prod_i \mathbb{Q}(A_i)^{n_i} \\
 &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \prod_i \mathbb{Q}(A_i)^{n_i}
 \end{aligned}$$

Dies ist die Multinomialverteilung, welche die Gleichverteilung von  $n$  zufällig aus  $A$  ausgewählten Punkten bezüglich des Maßes  $\mathbb{Q}$  beschreibt. *qed*

# Färbungssatz - Umkehrung des Überlagerungssatzes

Sei  $\Pi$  ein inhomogener Poissonprozess mit Intensitätsfunktion  $\lambda(x)$ .  
 Wir spalten nun  $\Pi$  auf, indem wir die Punkte von  $\Pi$  *unabhängig voneinander* einfärben:

Ein Punkt  $x \in \Pi$  wird mit Wahrscheinlichkeit  $p_1(x)$  grün gefärbt,  
 ansonsten mit der Wahrscheinlichkeit  $p_2(x) := 1 - p_1(x)$  rot.

Die Menge der grünen Punkte nennen wir  $\Pi_1$  und die der roten  $\Pi_2$ .  
 Dann sind  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  unabhängige Poissonprozesse mit  
 Intensitätsfunktionen

$$p_1(x)\lambda(x) \quad \text{bzw.} \quad p_2(x)\lambda(x).$$

# Beweis des Färbungssatzes

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $\Lambda(A) < \infty$ . Wenn  $|\Pi \cap A| = n$ , folgt nach dem Satz oben, dass diese Punkte unabhängig zufällig verteilt sind mit dem  $W$ 'maß  $Q(B) = \Lambda(B)/\Lambda(A)$ .

# Beweis des Färbungssatzes

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $\Lambda(A) < \infty$ . Wenn  $|\Pi \cap A| = n$ , folgt nach dem Satz oben, dass diese Punkte unabhängig zufällig verteilt sind mit dem  $W$ 'maß  $\mathbb{Q}(B) = \Lambda(B)/\Lambda(A)$ . Also gilt (wegen Unabhängigkeit), dass ein zufällig ausgewählter Punkt grün ist mit der  $W$ 'keit

$$\bar{p}_1 = \int_A p_1(x) d\mathbb{Q}$$

bzw. rot mit  $W$ 'keit  $\bar{p}_2 = 1 - \bar{p}_1$ .

Ebenso folgt aus dem Konditionalitätssatz: Die Anzahl der grünen Punkte  $N_1$  und der roten Punkte  $N_2$  sind binomialverteilt:

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2 \mid N(A) = n) = \frac{n!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \quad (n = n_1 + n_2),$$

Ebenso folgt aus dem Konditionalitätssatz: Die Anzahl der grünen Punkte  $N_1$  und der roten Punkte  $N_2$  sind binomialverteilt:

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2 \mid N(A) = n) = \frac{n!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \quad (n = n_1 + n_2),$$

und die Anzahl der grünen und roten Punkte sind unabhängig:

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \cdot \frac{\Lambda(A)^{n_1+n_2} e^{-\Lambda(A)}}{(n_1 + n_2)!}$$

Ebenso folgt aus dem Konditionalitätssatz: Die Anzahl der grünen Punkte  $N_1$  und der roten Punkte  $N_2$  sind binomialverteilt:

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2 \mid N(A) = n) = \frac{n!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \quad (n = n_1 + n_2),$$

und die Anzahl der grünen und roten Punkte sind unabhängig:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2) &= \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \cdot \frac{\Lambda(A)^{n_1+n_2} e^{-\Lambda(A)}}{(n_1 + n_2)!} \\ &= \frac{(\bar{p}_1 \Lambda(A))^{n_1} e^{-\bar{p}_1 \Lambda(A)}}{n_1!} \cdot \frac{(\bar{p}_2 \Lambda(A))^{n_2} e^{-\bar{p}_2 \Lambda(A)}}{n_2!} \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus dem Konditionalitätssatz: Die Anzahl der grünen Punkte  $N_1$  und der roten Punkte  $N_2$  sind binomialverteilt:

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2 \mid N(A) = n) = \frac{n!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \quad (n = n_1 + n_2),$$

und die Anzahl der grünen und roten Punkte sind unabhängig:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2) &= \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1!n_2!} \bar{p}_1^{n_1} \bar{p}_2^{n_2} \cdot \frac{\Lambda(A)^{n_1+n_2} e^{-\Lambda(A)}}{(n_1 + n_2)!} \\ &= \frac{(\bar{p}_1 \Lambda(A))^{n_1} e^{-\bar{p}_1 \Lambda(A)}}{n_1!} \cdot \frac{(\bar{p}_2 \Lambda(A))^{n_2} e^{-\bar{p}_2 \Lambda(A)}}{n_2!} \\ &= \mathbb{P}[N_1 = n_1] \cdot \mathbb{P}[N_2 = n_2]. \end{aligned}$$

Aus der Definition von  $\mathbb{Q}(B)$  folgt, dass diese poissonverteilt sind mit Parameter

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 \wedge(A) &= \int_A p_1(x) \wedge(A) d\mathbb{Q} = \int_A p_1(x) \lambda(x) dx, \\ \bar{p}_2 \wedge(A) &= \int_A p_2(x) \wedge(A) d\mathbb{Q} = \int_A p_2(x) \lambda(x) dx.\end{aligned}$$

Aus der Definition von  $\mathbb{Q}(B)$  folgt, dass diese poissonverteilt sind mit Parameter

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 \wedge(A) &= \int_A p_1(x) \wedge(A) d\mathbb{Q} = \int_A p_1(x) \lambda(x) dx, \\ \bar{p}_2 \wedge(A) &= \int_A p_2(x) \wedge(A) d\mathbb{Q} = \int_A p_2(x) \lambda(x) dx.\end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit für disjunkte Mengen folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft von  $\Pi$  selbst. *qed*

# Beispiele für Poissonprozesse

- ▶ Vorkommen von Sternen in einer Galaxis.  
Färbungssatz: Unterteilung in gelbe Sterne, rote Riesen, weiße Zwerge...

# Beispiele für Poissonprozesse

- ▶ Vorkommen von Sternen in einer Galaxis.  
Färbungssatz: Unterteilung in gelbe Sterne, rote Riesen, weiße Zwerge...
- ▶ Wetterereignisse wie Tornados.  
Färbungssatz: Unterteilung der Tornados nach Stärke.  
Überlagerungssatz: Kombination mit Erdbeben etc. in der Versicherungsbranche.

# Beispiele für Poissonprozesse

- ▶ Vorkommen von Sternen in einer Galaxis.  
Färbungssatz: Unterteilung in gelbe Sterne, rote Riesen, weiße Zwerge...
- ▶ Wetterereignisse wie Tornados.  
Färbungssatz: Unterteilung der Tornados nach Stärke.  
Überlagerungssatz: Kombination mit Erdbeben etc. in der Versicherungsbranche.
- ▶ Bären in Bayern (nach Edmund Stoiber)  
Färbungssatz: Unterteilung in „Schadbären“ und „Problembären“ etc.

## Abstandswahrscheinlichkeit zweier Punkte im $\mathbb{R}^2$ :

Sei ein zweidimensionaler Poissonprozess mit Intensität  $\lambda$  gegeben, wir untersuchen nun die Entfernung  $D$  zwischen einem Punkt  $A$  und seinem nächstgelegenen Nachbarn.

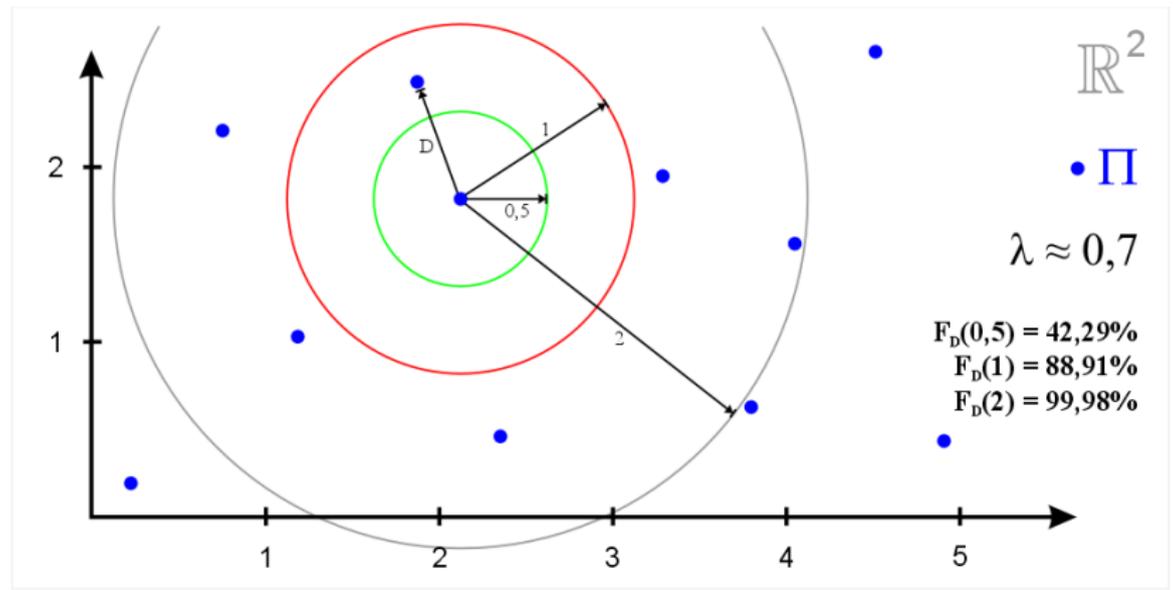
Für  $x > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} F_D(x) &:= \mathbb{P}(D \leq x) = 1 - \mathbb{P}(D > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{Kein Punkt auf dem Kreis um } A \text{ mit Fläche } \pi x^2) \\ &= 1 - e^{-\lambda \pi x^2} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Dichtefunktion

$$f_D(x) := \frac{d}{dx} F_D(x) = 2\lambda\pi x \cdot e^{-\lambda\pi x^2}.$$

# Illustration



# Abstandswahrscheinlichkeit im $\mathbb{R}^3$ :

Analog erhalten wir im dreidimensionalen Fall für  $x > 0$ :

$$F_D(x) = 1 - e^{-\lambda \frac{4\pi}{3} x^3}$$

und

$$f_d(x) = \frac{d}{dx} F_D(x) = 4\lambda\pi x^2 \cdot e^{-\lambda \frac{4\pi}{3} x^3}.$$

# Simulation poissonverteilter Punkte im $\mathbb{R}^2$

**EINGABE:** Parameter  $\lambda > 0$ , Größe  $n \in \mathbb{N}$ .

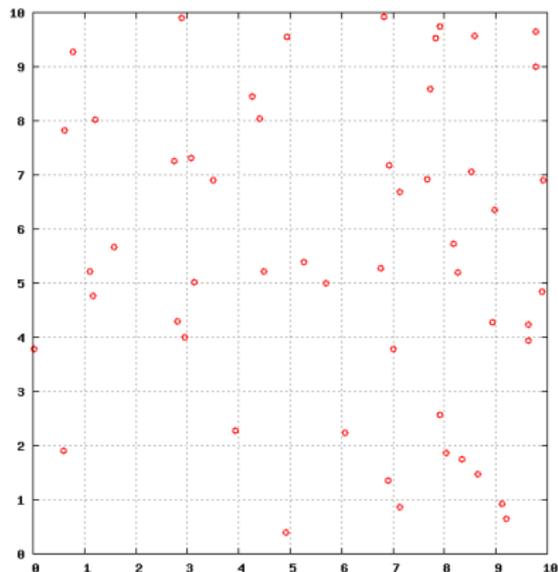
**AUSGABE:** Poissonprozess auf  $[0, n]^2$  mit konstanter Intensität  $\lambda$ .

1. Erzeuge  $n^2$  poissonverteilte Zufallsvariablen  $N_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .
2. Für  $i, j = 1, \dots, n$ :  
Erzeuge  $N_{ij}$  unabh., gleichvert. Zufallsvariablen aus  $(0, 1)^2$ .  
Verschiebe diese um  $(i, j)$ .

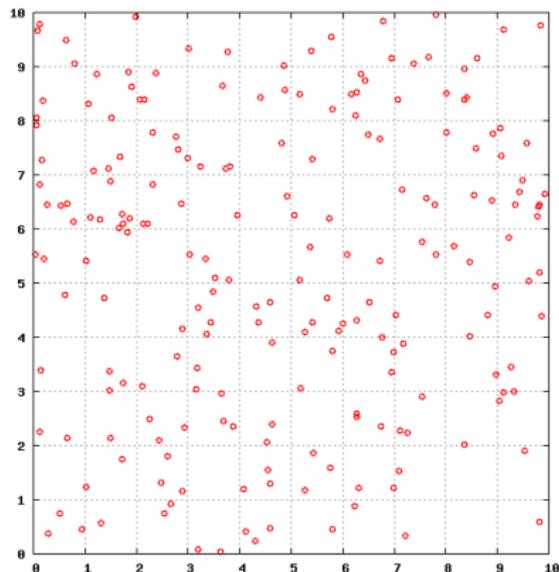
## Erzeugung einer poissonverteilten Zufallsvariable:

1. Setze  $L := e^{-\lambda}$ ,  $p := 1$ ,  $k := 0$ .
2. Solange  $p \geq L$ :  
 $k = k + 1$   
 $p = p \cdot \text{rand}$ , wobei  $\text{rand}$  i.i.d. aus  $(0, 1)$
3. Übergebe  $k - 1$ .

# Variation des Parameters $\lambda$

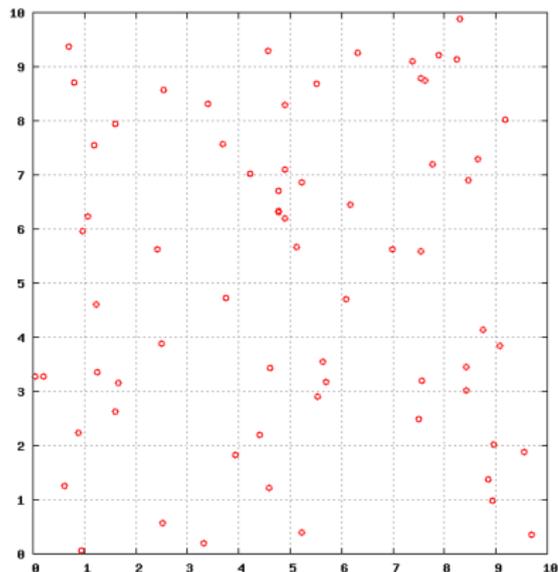


$\lambda = 0,5 : |\Pi| = 53$   
Abstandsmedian: 0,664

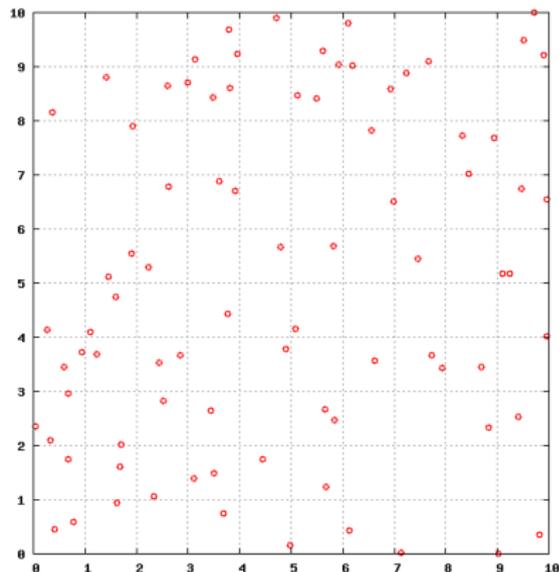


$\lambda = 2 : |\Pi| = 206$   
Abstandsmedian: 0,332

## Zwei Prozesse mit gleichem $\lambda$

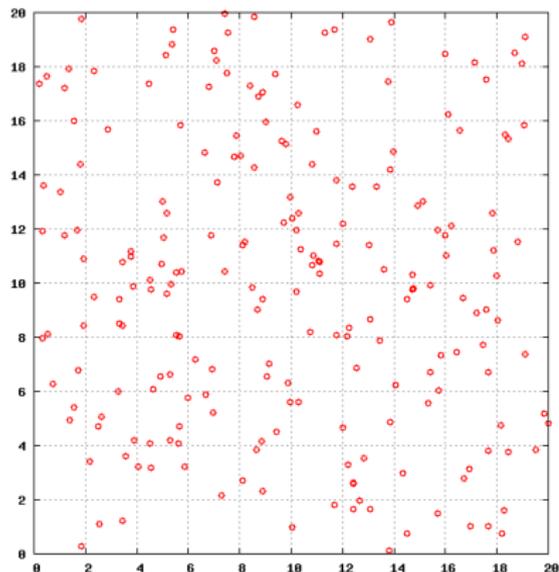


$\lambda = 0,7 : |\Pi| = 68$   
Abstandsmedian: 0,561

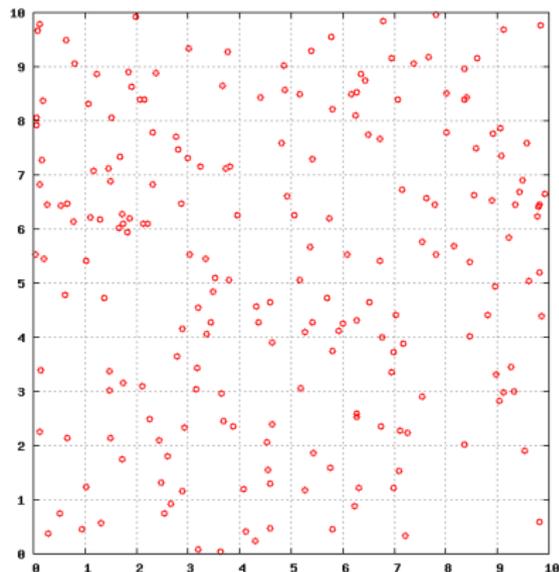


$\lambda = 0,7 : |\Pi| = 83$   
Abstandsmedian: 0,561

# Variation von $\lambda$ und Skalierung



$\lambda = 0,5 : |\Pi| = 211$   
Abstandsmedian:  $0,664/2$



$\lambda = 2 : |\Pi| = 206$   
Abstandsmedian:  $0,332$

# Schlußwort

Die Folien sowie eine textgleiche Druckversion (mit allen Abbildungen) dieses Vortrags sind auch im Internet abrufbar unter:

*[www.bluesquaregroup.de/studium/grohganz/inhalte.php](http://www.bluesquaregroup.de/studium/grohganz/inhalte.php)*

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

# Literaturverzeichnis

- ▶ GRIMMET, GEOFFREY und DAVID STIRZAKER:  
Probability and Random Processes.  
Oxford University Press, 2001.
- ▶ KNUTH, DONALD  
Seminumerical Algorithms, The Art of Computer Programming.  
Addison Wesley, 1969.  
**zitiert in:**  
*en.wikipedia.org/Poisson\_distribution*
- ▶ Course 7440, Section 2, Stochastic Simulation, Presentation 11:  
Spatial Poisson Process  
Institut of Applied Mathematics, University of Colorado, Fall 2004  
*amath.colorado.edu/courses/7400/2004fall/002/Web/SS-11.ppt*