

# *Visualisierung von Stochastik*

## *Räumliche Stochastische Strukturen*

Harald G. Grohgan

Diplomandenseminar bei Prof. Dr. Andreas Eberle,  
Freitag, 28. November 2008

# *Simulation natürlicher Gleichgewichte*



- 1 *Modellierung - stochastisch vs. deterministisch*
  - Das Lotka-Volterra-Modell
  - Das stochastische Modell
  - Weitere Ergebnisse
  
- 2 *Wator - Simulation mittels eines Zellularautomaten*
  - Modellierungsidee und Algorithmus
  - Simulation | Vorführung

## Lotka-Volterra-Modell: Einführung

Für die grundsätzliche Modellierung von Populationsdynamiken existiert seit 1932 das Lotka-Volterra-Modell. Dieses beschreibt in seiner klassischen Form das Vorliegen zweier Populationen, die sich gegenseitig beeinflussen.

Hier betrachten wir die Anzahl  $N_1$ ,  $N_2$  zweier Pflanzenarten mit Wachstumsraten  $r_1, r_2$ . Eine natürliche Obergrenze der Arten wird durch  $K_1, K_2$  angegeben - in Abwesenheit der zweiten Pflanzenart gilt also  $N_1 = K_1$ .

Somit lassen sich  $K_1, K_2$  auch als **inerspezifischer Konkurrenzdruck** verstehen. Die **zweispezifische Konkurrenz** wird durch  $a_{12}$  und  $a_{21}$  beschrieben, wobei  $a_{ij}$  den Effekt der Spezies  $j$  auf die Spezies  $i$  bezeichnet. Wir nehmen  $a_{ij} \geq 0$  an.

## Lotka-Volterra-Modell: Einführung

Für die grundsätzliche Modellierung von Populationsdynamiken existiert seit 1932 das Lotka-Volterra-Modell. Dieses beschreibt in seiner klassischen Form das Vorliegen zweier Populationen, die sich gegenseitig beeinflussen.

Hier betrachten wir die Anzahl  $N_1$ ,  $N_2$  zweier Pflanzenarten mit Wachstumsraten  $r_1, r_2$ . Eine natürliche Obergrenze der Arten wird durch  $K_1, K_2$  angegeben - in Abwesenheit der zweiten Pflanzenart gilt also  $N_1 = K_1$ .

Somit lassen sich  $K_1, K_2$  auch als **inerspezifischer Konkurrenzdruck** verstehen. Die **zwischenpezifische Konkurrenz** wird durch  $a_{12}$  und  $a_{21}$  beschrieben, wobei  $a_{ij}$  den Effekt der Spezies  $j$  auf die Spezies  $i$  bezeichnet. Wir nehmen  $a_{ij} \geq 0$  an.

## Lotka-Volterra-Modell: Differentialgleichungen

Dann können wir für die Populationsgrößen folgendes System von Differentialgleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1}{K_1} - a_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2}{K_2} - a_{21} \frac{N_1}{K_2} \right)\end{aligned}$$

Berechnet man die (nichttrivialen) Gleichgewichtspunkte des obigen Systems, so erhält man:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{K_1 - a_{12}K_2}{1 - a_{12}a_{21}} \\ N_2 &= \frac{K_2 - a_{21}K_1}{1 - a_{12}a_{21}}\end{aligned}$$

## Lotka-Volterra-Modell: Differentialgleichungen

Dann können wir für die Populationsgrößen folgendes System von Differentialgleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1}{K_1} - a_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2}{K_2} - a_{21} \frac{N_1}{K_2} \right)\end{aligned}$$

Berechnet man die (nichttrivialen) Gleichgewichtspunkte des obigen Systems, so erhält man:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{K_1 - a_{12}K_2}{1 - a_{12}a_{21}} \\ N_2 &= \frac{K_2 - a_{21}K_1}{1 - a_{12}a_{21}}\end{aligned}$$

- 1 **Koexistenz:** Wenn die zwischenspezifische Konkurrenz schwächer ist als die innerspezifische Konkurrenz, d.h. es gilt

$$K_1 > a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 > a_{21}K_1 ,$$

so existiert ein nichttriviales stabiles Gleichgewicht, in dem beide Spezies überleben.

- 2 **Konkurrenzausschluss:** Eine »starke« Spezies verdrängt eine »schwache«. Dieser Fall tritt ein, falls

$$K_1 < a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 > a_{21}K_1 ,$$

d.h. in diesem Fall setzt sich Spezies 2 durch und Spezies 1 stirbt aus.

- 3 **Startdominanz:** Falls die zwischenspezifische Konkurrenz stärker ist als die innerspezifische Konkurrenz, d.h. es gilt

$$K_1 < a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 < a_{21}K_1 ,$$

dann können beide Spezies nicht koexistieren. Welche Spezies ausstirbt, hängt von den Startbedingungen ab.

- 1 **Koexistenz:** Wenn die zwischenspezifische Konkurrenz schwächer ist als die innerspezifische Konkurrenz, d.h. es gilt

$$K_1 > a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 > a_{21}K_1 ,$$

so existiert ein nichttriviales stabiles Gleichgewicht, in dem beide Spezies überleben.

- 2 **Konkurrenzausschluss:** Eine »starke« Spezies verdrängt eine »schwache«. Dieser Fall tritt ein, falls

$$K_1 < a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 > a_{21}K_1 ,$$

d.h. in diesem Fall setzt sich Spezies 2 durch und Spezies 1 stirbt aus.

- 3 **Startdominanz:** Falls die zwischenspezifische Konkurrenz stärker ist als die innerspezifische Konkurrenz, d.h. es gilt

$$K_1 < a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 < a_{21}K_1 ,$$

dann können beide Spezies nicht koexistieren. Welche Spezies ausstirbt, hängt von den Startbedingungen ab.

- 1 **Koexistenz:** Wenn die zwischenspezifische Konkurrenz schwächer ist als die innerspezifische Konkurrenz, d.h. es gilt

$$K_1 > a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 > a_{21}K_1 ,$$

so existiert ein nichttriviales stabiles Gleichgewicht, in dem beide Spezies überleben.

- 2 **Konkurrenzausschluss:** Eine »starke« Spezies verdrängt eine »schwache«. Dieser Fall tritt ein, falls

$$K_1 < a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 > a_{21}K_1 ,$$

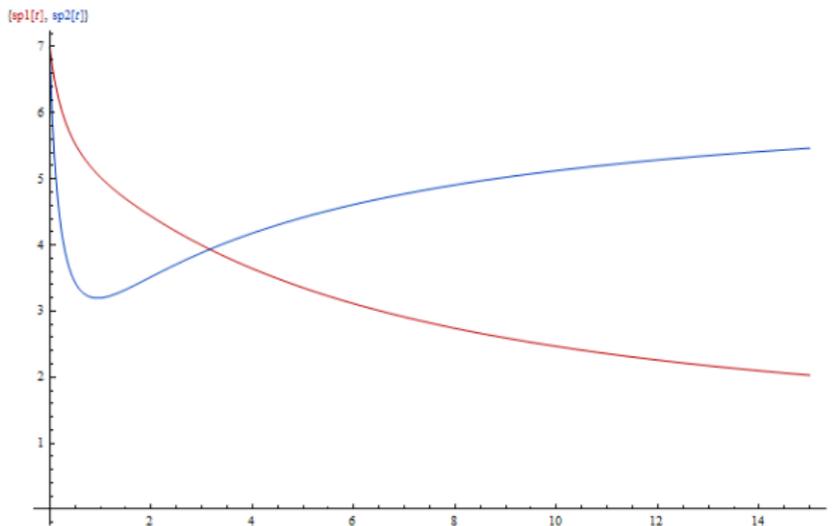
d.h. in diesem Fall setzt sich Spezies 2 durch und Spezies 1 stirbt aus.

- 3 **Startdominanz:** Falls die zwischenspezifische Konkurrenz stärker ist als die innerspezifische Konkurrenz, d.h. es gilt

$$K_1 < a_{12}K_2 \quad \text{und} \quad K_2 < a_{21}K_1 ,$$

dann können beide Spezies nicht koexistieren. Welche Spezies ausstirbt, hängt von den Startbedingungen ab.

# Lotka-Volterra-Modell: Illustration



$$K_1 = 7, K_2 = 7, \quad r_1 = 1, r_2 = 5 \quad a_{12} = 0.95, a_{21} = 0.75$$

## Erweiterung zu räuml. stoch. Modell

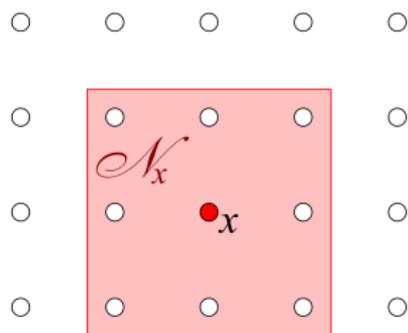
Wir modellieren das räumliche System als **zeitstetigen**

**Markovprozess** auf  $\mathbb{Z}^d$  mit Zuständen  $\eta_t \in \{1, 2\}^{\mathbb{Z}^d}$ , d.h.  $\eta_t(x) = i$  für eine Pflanze vom Typ  $i$  auf dem Feld  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ . Leere Felder gibt es in diesem Modell nicht.

Zur Beschreibung der ortsabhängigen Dynamik setzen wir

$$f_i(x) = \frac{|\{y \mid \eta_t(y) = i, y \in \mathcal{N}_x\}|}{|\mathcal{N}_x|},$$

wobei  $\mathcal{N}_x := x + \{y \mid 0 < \|y\|_\infty \leq R\}$  die Nachbarschaft von  $x$  beschreibt.



## Das stochastische Modell: Übergangsregeln

Der Fortgang des Prozesses  $(\eta_t)_{t \geq 0}$  wird durch folgende Regeln beschrieben:

- Falls  $\eta_t(x) = 1$ , so wird es im nächsten Schritt eine 2 mit Rate

$$\frac{\lambda f_2}{\lambda f_2 + f_1} (f_1 + \alpha_{12} f_2).$$

- Falls  $\eta_t(x) = 2$ , so wird es im nächsten Schritt eine 1 mit Rate

$$\frac{f_1}{\lambda f_2 + f_1} (f_2 + \alpha_{21} f_1).$$

### Interpretation:

Partikel  $i$  stirbt mit Rate  $f_i + \alpha_{ij} f_j$ .  $f_i$  beschreibt den innerspezifischen Konkurrenzdruck;  $\alpha_{ij} f_j$  den zwischenspezifischen. Nach dem Tod des Partikels wird es sofort ersetzt, proportional zu  $\lambda$  (die gewichtete Dichte der beiden Spezies).

## Erste Analyse: Das Erwartungswertmodell

Als ersten Schritt untersuchen wir das Verhalten des Systems **in der Erwartung**, d.h. wir nehmen alle Raumpunkte als unabhängig an und untersuchen die Entwicklung der Dichten. Sei  $u_i$  der räumliche Anteil im Zustand  $i$ .

Da  $u_1 + u_2 = 1$ , genügt eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{du_1}{dt} = -u_1 \frac{\lambda u_2}{\lambda u_2 + u_1} (u_1 + \alpha_{12} u_2) + u_2 \frac{u_1}{\lambda u_2 + u_1} (u_2 + \alpha_{21} u_1).$$

Neben den trivialen Gleichgewichtspunkten 0 und 1 existiert ein weiteres Gleichgewicht bei

$$u_1^* = \frac{1}{1 + \frac{\lambda - \alpha_{21}}{1 - \lambda \alpha_{12}}}.$$

## Ergebnisse im Erwartungswertmodell

Aus diesem Gleichgewichtspunkt lässt sich folgendes Verhalten des Prozesses ablesen:

- 1 **Koexistenz:** Falls  $0 \leq \alpha_{21} < \lambda$  und  $0 \leq \alpha_{12} < 1/\lambda$  gilt, so ist das nichttriviale Gleichgewicht stabil.
- 2 **Konkurrenzausschluss:** Wenn gilt:  $\alpha_{21} > \lambda$  und  $0 \leq \alpha_{12} < 1/\lambda$ , so wird Spezies 2 von Spezies 1 verdrängt. Analog für die umgekehrte Richtung.
- 3 **Startdominanz:** Im Fall  $\alpha_{21} > \lambda$  und  $\alpha_{12} > 1/\lambda$  ist der nichttriviale Gleichgewichtspunkt instabil. Welche Spezies sich durchsetzen wird, hängt von der Startverteilung ab.

## Das räumliche Modell

Wird nun  $R$  endlich gesetzt (d.h. nur die Nachbarschaft  $\mathcal{N}_x$  hat Einfluss auf  $\eta_t(x)$ ), so ergeben sich im Wesentlichen drei große Abweichungen zum Erwartungswert- und damit auch zum Lotka-Volterra-Modell:

- 1 Nachbarschafts-Interaktion sorgt für eine räumliche Trennung der Spezies.
- 2 Nachbarschafts-Interaktion reduziert die Größe des Parameterbereiches, in dem Koexistenz möglich ist.
- 3 Nachbarschafts-Interaktion reduziert die Größe des Parameterbereiches, bei dem der Ausgang von der Startverteilung abhängt.

### Bemerkung

Für  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1$ ,  $\lambda = 1$  und  $\mathcal{N} = \{-1, 1\}$  stimmt dieses Modell mit dem »voter model« überein.

## Vergleich: Gemeinsamkeiten...

Für den Fall  $\alpha < 1$  verhält sich das räumliche Modell wie im Erwartungswertmodell. Allgemeiner gilt:

### *Theorem*

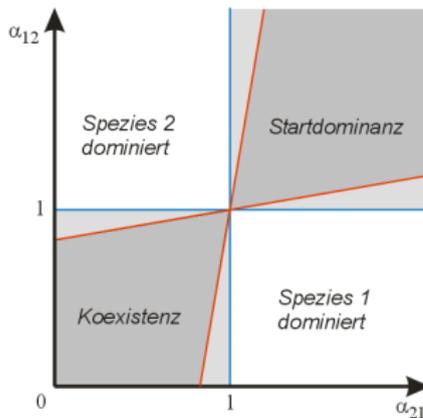
*Falls  $\lambda \geq 1$  und  $R$  groß genug, so konvergiert die Verteilung der Spezies im räumlichen Modell gegen ein Produktmaß mit Dichte*

$$u_1^* = \frac{1}{1 + \frac{\lambda - \alpha_{21}}{1 - \lambda \alpha_{12}}}.$$

Solche Langzeit-Limites implizieren, dass auf lange Sicht gesehen die räumlichen Gegebenheiten keinen Unterschied mehr ausmachen und die rein erwartungsmäßige Modellierung sich als adäquat erweist, falls sie genau ein stabiles Gleichgewicht aufweist.

## ...und Unterschiede

Es gibt aber auch Fälle, bei denen das räumliche Modell vom Erwartungswertmodell abweicht: Für jedes  $N > 2$  existiert ein  $\lambda \in (1, \infty)$ , sodass  $\alpha_{12}, \alpha_{21}$  so gewählt werden können, dass vom Erwartungswertmodell Koexistenz (oder Startdominanz) vorausgesagt wird, wohingegen im räumlichen Modell die 2-Spezies von der 1-Spezies verdrängt wird.



Legende:

Erwartungswertmodell

räumliches Modell

## Offene Fragen und Vermutungen

### Vermutung 1

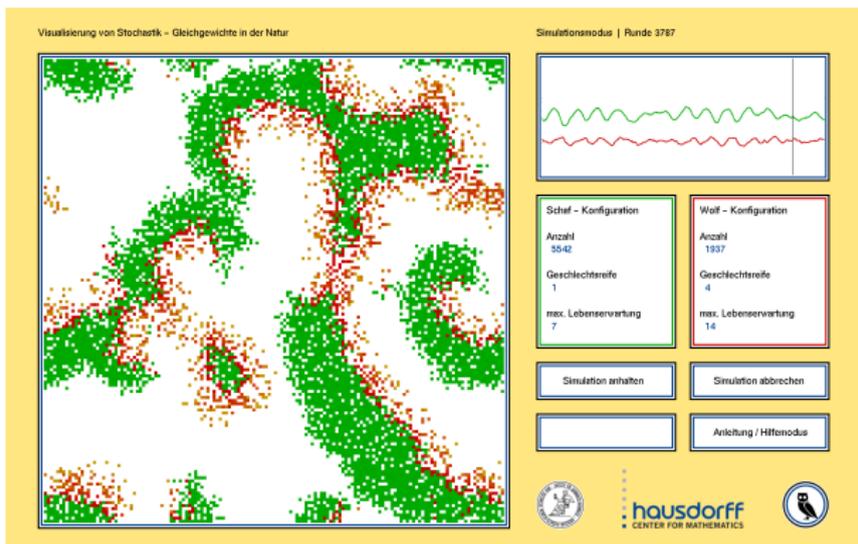
Gilt  $\lambda = 1$  und  $\alpha \equiv \alpha_{12} = \alpha_{21}$ , so ist im Falle  $d \geq 2$  für jedes  $\alpha < 1$  Koexistenz möglich, unabhängig von der räumlichen Dimension.

Durch die Unterschiede bei Koexistenz und Startdominanz im Falle  $\lambda > 1$  wird folgende Vermutung motiviert:

### Vermutung 2

Gilt  $\lambda = 1$ , so gibt es keine Startdominanz im räumlichen Modell. Falls  $\alpha_{21} > \alpha_{12} > 1$  und anfangs unendlich viele 1-Spezies vorhanden sind, so setzen sich diese mit  $W$ 'keit 1 durch; und umgekehrt.

# Simulation | Das Modell



Die Wölfe-Schafe-Simulation beruht zu großen Teilen auf dem Modell »Wator«, das 1984 erstmals publiziert wurde. Das Feld ist torisch verknüpft, es werden zwei Spezies (Raub- und Beutetier) betrachtet, Parameter sind wählbar. Leere Felder sind möglich.

## Simulation | Algorithmus

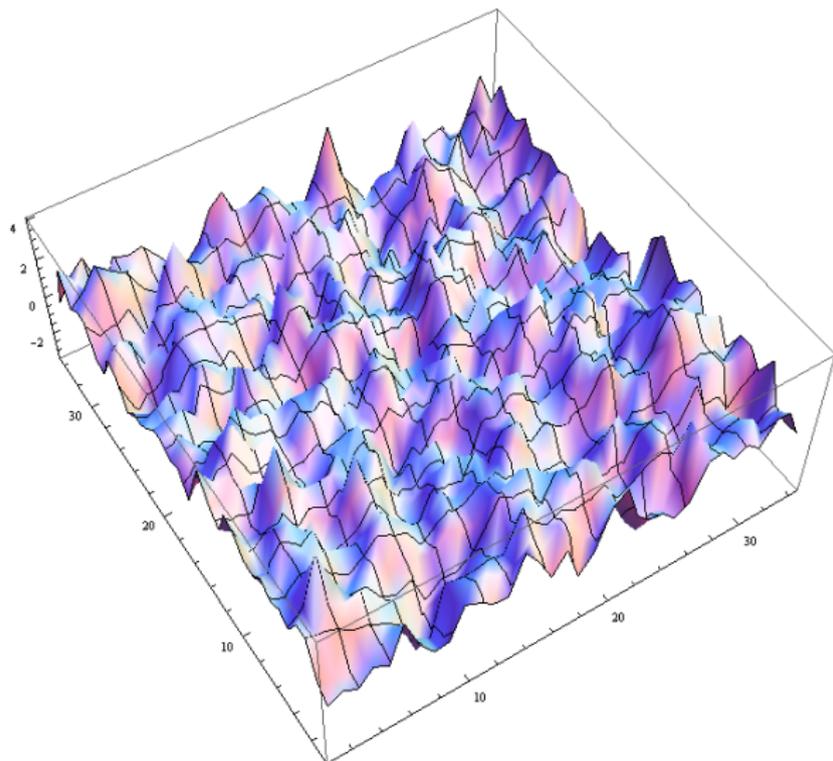
Der Simulation liegen folgende Regeln zugrunde:

- »**Objektidentität**«: Jedes Tier ist eindeutig bestimmt, es weist die Eigenschaften Alter, Sättigungsgrad und Position auf.
- »**Aktionen**«: Im Laufe eines Spielzugs führt jedes Tier (abhängig vom Alter) die Aktion »Nachwuchs« oder »Bewegung« aus.
- »**zufälliger Tod**«: Jedes Tier stirbt in dem Spielzug mit der W'keit  $\frac{1}{\text{max. Alter}}$ .
- »**Schlagen**«: Ein Wolf frisst immer ein benachbartes Schaf. Bei mehreren benachbarten Schafen geschieht die Auswahl zufällig.
- »**Hunger**«: Wölfe können nur max. 4 Runden ohne Nahrung überleben.
- »**Pflanzen**«: Für Schafe steht unbegrenzt viel Nahrung zur Verfügung.

# Simulation | Vorführung



# Gaußsche Felder | Gaussian free fields



### 3 *Konstruktion*

- Erinnerung: Wiener-Levy-Konstruktion der BB
- Mehrdimensionale Verallgemeinerung
- Konstruktion über abstrakten Wienertraum
- Definition über Gaußschen Hilbertraum

### 4 *Eigenschaften*

- Mittelwert und Markoveigenschaft
- Brownsche Bewegung auf raumfüllender Kurve

### 5 *Beispiele und Simulation*

- Beispiel: GFF auf dem Einheitstorus
- Diskretisierung - »harmonic crystal«
- Simulation
- Ausblick

## Erinnerung: Wiener-Levy-Konstruktion I

### Idee

Brownsche Bewegung als zufällige Überlagerung deterministischer Pfade.

Sei  $(B_t)_{t \geq 0}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  eine Brownsche Bewegung mit  $B_0 = 0$ .  
Betrachte nun  $B$  als Zufallsvariable  $(B_t)_{0 \leq t \leq 1} : \Omega \rightarrow C([0, 1])$ .

Dann ist  $B(\omega)$  ein zufälliger Pfad und  $P_0 = P \circ B^{-1}$  ist Wienermaß auf  $C([0, 1])$ . Definiere

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 |x'(t)|^2 dt, \quad \text{d.h. } P_0 \text{ ist »Standardnormalverteilung«}$$

auf dem Hilbertraum

$$H = \{f \in C([0, 1]) \mid f(0) = 0, f \text{ ist absolutstetig mit } f' \in L^2([0, 1])\}$$

mit Skalarprodukt  $(f, g)_H = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ .

Nun konstruieren wir die Zufallsvariable  $B : \Omega \rightarrow C([0, 1])$  mit Verteilung  $P_0$ :

$$B_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega) e_n(t)$$

mit  $\{e_n\}$  ONB von  $H$ ,  $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  i.i.d. ZV,  $\omega \in \Omega$  und  $t \in [0, 1]$ .

Da  $\dim H = \infty$ , konvergiert obige Reihe  $P$ -f.s. nicht (GdgZ). Daher betrachte Banachraum  $C([0, 1]) \supset H$  mit sup-Norm, in dem die Reihe konvergiert (Satz von WIENER, LÉVY, ITÔ etc.).

### Beispiel (WIENER)

Eine Wahlmöglichkeit für die ONB ist die »zufällige Fourierreihe«

$$e_0(t) = t, \quad e_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \cdot \sin(\pi n t) .$$

Nun konstruieren wir die Zufallsvariable  $B : \Omega \rightarrow C([0, 1])$  mit Verteilung  $P_0$ :

$$B_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega) e_n(t)$$

mit  $\{e_n\}$  ONB von  $H$ ,  $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  i.i.d. ZV,  $\omega \in \Omega$  und  $t \in [0, 1]$ .

Da  $\dim H = \infty$ , konvergiert obige Reihe  $P$ -f.s. nicht (GdgZ). Daher betrachte Banachraum  $C([0, 1]) \supset H$  mit sup-Norm, in dem die Reihe konvergiert (Satz von WIENER, LÉVY, ITÔ etc.).

### Beispiel (WIENER)

Eine Wahlmöglichkeit für die ONB ist die »zufällige Fourierreihe«

$$e_0(t) = t, \quad e_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \cdot \sin(\pi n t) .$$

## Bezeichnungen

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ . Bezeichne mit

$$H_s(D) := \{f \in C_0^\infty(D) \mid \nabla f \in L^2, f \text{ hat kompakten Träger in } D\}$$

den Raum aller glatten Funktionen mit kompaktem Träger, deren erste Ableitung in  $L^2$  liegt.  $H(D) = \overline{H_s(D)}$  sei die Vervollständigung unter der durch das **Dirichlet-Skalarprodukt** (oder **Energiefunktional**)

$$(f, g)_\nabla := \int_D \nabla f \cdot \nabla g \, dx$$

induzierten Norm. Diese bezeichnen wir mit  $\|f\|_\nabla = \sqrt{(f, f)_\nabla}$ .

$H(D) = W_0^{1,2}$  ist ein Sobolev-Raum.

Für eine bijektive Abbildung  $h$  von  $D$  nach  $D'$  gilt, falls  $h$  eine Translation oder orthogonale Rotation ist,

$$\int_{D'} \nabla(f \circ h^{-1}) \cdot \nabla(g \circ h^{-1}) dx = \int_D (\nabla f \cdot \nabla g) dx$$

sowie, falls  $h = cx$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{D'} \nabla(f \circ h^{-1}) \cdot \nabla(g \circ h^{-1}) dx = c^{d-2} \int_D (\nabla f \cdot \nabla g) dx.$$

Insbesondere folgt daraus, dass das Dirichlet-Skalarprodukt invariant unter konformen Abbildungen für  $d = 2$  ist – auch daher ist das Gaußfeld ein interessantes Objekt.

Sei  $(f, g) = \int fg \, dx$  das Standardskalarprodukt für Funktionen auf  $D$ ,  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$  die dazugehörige Norm. Durch partielle Integration erhält man  $(f, g)_{\nabla} = (f, -\Delta g)$ .

Für eine bijektive Abbildung  $h$  von  $D$  nach  $D'$  gilt, falls  $h$  eine Translation oder orthogonale Rotation ist,

$$\int_{D'} \nabla(f \circ h^{-1}) \cdot \nabla(g \circ h^{-1}) dx = \int_D (\nabla f \cdot \nabla g) dx$$

sowie, falls  $h = cx$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{D'} \nabla(f \circ h^{-1}) \cdot \nabla(g \circ h^{-1}) dx = c^{d-2} \int_D (\nabla f \cdot \nabla g) dx.$$

Insbesondere folgt daraus, dass das Dirichlet-Skalarprodukt invariant unter konformen Abbildungen für  $d = 2$  ist – auch daher ist das Gaußfeld ein interessantes Objekt.

Sei  $(f, g) = \int fg \, dx$  das Standardskalarprodukt für Funktionen auf  $D$ ,  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$  die dazugehörige Norm. Durch partielle Integration erhält man  $(f, g)_{\nabla} = (f, -\Delta g)$ .

## Theorem

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\mu_V$  das  $W$ 'maß  $\frac{1}{Z} \cdot \exp\left(-\frac{\|v\|_V^2}{2}\right)$ ,  $Z \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- 1  $v$  hat Verteilung  $\mu_V$ .
- 2  $v$  hat dieselbe Verteilung wie  $\sum_{i=1}^d \alpha_i v_i$ , wobei  $\{v_i\}$  eine ONB für  $V$  ist und  $\alpha_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- 3 Die charakteristische Funktion von  $v$  ist für alle  $t \in \mathbb{R}^d$  gegeben durch

$$\phi_v(t) = \mathbb{E} \left[ e^{i \cdot (v, t)} \right] = e^{-\frac{1}{2} \|t\|^2}.$$

- 4 Für jedes feste  $w \in V$  ist  $(v, w)$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Varianz  $\|w\|^2$ .

Eine Zufallsvariable, die diese Bedingungen erfüllt, heißt **standard-normalverteilt (standard Gaussian random variable)** auf  $V$ .

## Konstruktion des Gaußfeldes

Das Gaußfeld ist also eine standard-normalverteilte ZV auf  $H(D)$ .  
Wegen  $\dim H(D) = \infty$  ist dies nicht so einfach möglich.

**Warnung: So gehts nicht**

$h \in H(D)$  ZV, deren Projektionen auf endlichdim. Teilräume von  $H(D)$  standard-normalverteilt sind.

Bezüglich einer ONB wären aber dann die einzelnen Komponenten von  $h$  i.i.d. Gaußsche ZVn, somit wäre f.s. die Summe ihrer Quadrate unendlich, was  $h \notin H(D)$  bedeuten würde!

Eine Definition ist über zwei Zugänge möglich:

- Abstrakte Wiener Räume (Abstract Wiener spaces)  
LEONARD GROSS, 1967
- Gaußsche Hilberträume (Gaussian Hilbert spaces)  
SVANTE JANSEN, 1997

## Konstruktion des Gaußfeldes

Das Gaußfeld ist also eine standard-normalverteilte ZV auf  $H(D)$ .  
Wegen  $\dim H(D) = \infty$  ist dies nicht so einfach möglich.

*Warnung: So gehts nicht*

$h \in H(D)$  ZV, deren Projektionen auf endlichdim. Teilräume von  $H(D)$  standard-normalverteilt sind.

Bezüglich einer ONB wären aber dann die einzelnen Komponenten von  $h$  i.i.d. Gaußsche ZVn, somit wäre f.s. die Summe ihrer Quadrate unendlich, was  $h \notin H(D)$  bedeuten würde!

Eine Definition ist über zwei Zugänge möglich:

- Abstrakte Wiener Räume (Abstract Wiener spaces)  
LEONARD GROSS, 1967
- Gaußsche Hilberträume (Gaussian Hilbert spaces)  
SVANTE JANSEN, 1997

# Abstrakter Wienertraum

Sei  $H$  ein Hilbertraum mit  $\dim H = \infty$ .

**Gesucht:** Definition für  $h \in H$  standard-normalverteilt.

**Idee:**  $h$  als zufälliges Element eines Banachraums  $B \supset H(D)$ .

Eine Norm  $|\bullet|$  auf  $H$  heißt **messbar**, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein endlichdim. Teilraum  $E_\varepsilon \subset H$  existiert, für den gilt:

$$E \perp E_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \mu_E(\{x \in E \mid |x| > \varepsilon\}) < \varepsilon,$$

wobei  $\mu_E$  das Gaußmaß auf  $E$  beschreibt.

## Theorem

Wenn  $T$  ein Hilbert-Schmidt-Operator auf  $H$  ist, d.h.  $\sum \|Tf_j\|^2 < \infty$  für eine ONB  $\{f_j\}$  von  $H$  gilt, dann ist die Norm  $\|T\bullet\|$  messbar.

# Abstrakter Wienertraum

Sei  $H$  ein Hilbertraum mit  $\dim H = \infty$ .

**Gesucht:** Definition für  $h \in H$  standard-normalverteilt.

**Idee:**  $h$  als zufälliges Element eines Banachraums  $B \supset H(D)$ .

Eine Norm  $|\bullet|$  auf  $H$  heißt **messbar**, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein endlichdim. Teilraum  $E_\varepsilon \subset H$  existiert, für den gilt:

$$E \perp E_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \mu_E(\{x \in E \mid |x| > \varepsilon\}) < \varepsilon,$$

wobei  $\mu_E$  das Gaußmaß auf  $E$  beschreibt.

## Theorem

Wenn  $T$  ein Hilbert-Schmidt-Operator auf  $H$  ist, d.h.  $\sum \|Tf_j\|^2 < \infty$  für eine ONB  $\{f_j\}$  von  $H$  gilt, dann ist die Norm  $\|T\bullet\|$  messbar.

Nun setze  $B = \overline{H}$  unter der Norm  $|\bullet|$ ,  $B^*$  sei der topologische Dualraum und  $\mathcal{B}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, in der die Funktionale aus  $B^*$  messbar sind.

Dann liegt  $H$  dicht in  $B$ . Für  $f \in B^*$  gilt:  $f|_H$  ist stetig auf  $H$ , da messbare Normen auf  $H$  immer schwächer sind als die  $H$ -Norm.

Wegen  $f = 0$  in  $H \Rightarrow f = 0$  in  $B$  ist die Restriktion injektiv.

Somit ergibt sich  $B^* \subset H \subset B$ .

Im Falle  $f \in B^*$ ,  $b \in B$  schreiben wir auch  $(f, b) := f(b)$   
(»Dualitätsprodukt«).

Für ein  $E \subset B^*$ ,  $\dim E < \infty$  mit  $H$ -ONB  $\{v_j\}$  ist

$$\phi_E : B \rightarrow E, \quad \phi_E(b) = \sum (v_j, b)v_j$$

die auf  $B$  erweiterte Orthogonalprojektion von  $H$  nach  $E$ . Dann gilt mit dem Gaußmaße-Theorem:

### *Theorem (Gross)*

*Wenn  $|\bullet|$  messbar ist, dann existiert ein eindeutiges  $W$ -Maß  $P$ , sodass für eine ZV  $h$  mit Maß  $P$  und jedes  $f \in B^*$  die Zufallsvariable  $(h, f) \mathcal{N}(0, |f|^2)$ -verteilt ist.*

Das Tripel  $(H, B, P)$  heißt **abstrakter Wienererraum**.

### *Beispiel*

Im Falle des »klassischen« Wienererraums gilt:  $H = H((0, 1))$  mit Dirichlet-Skalarprodukt,  $|\bullet| = \|\bullet\|_\infty$  und  $B = C_0^\infty([0, 1])$ . (s.o.)

Für ein  $E \subset B^*$ ,  $\dim E < \infty$  mit  $H$ -ONB  $\{v_j\}$  ist

$$\phi_E : B \rightarrow E, \quad \phi_E(b) = \sum (v_j, b)v_j$$

die auf  $B$  erweiterte Orthogonalprojektion von  $H$  nach  $E$ . Dann gilt mit dem Gaußmaße-Theorem:

### *Theorem (Gross)*

*Wenn  $|\bullet|$  messbar ist, dann existiert ein eindeutiges  $W$ -Maß  $P$ , sodass für eine ZV  $h$  mit Maß  $P$  und jedes  $f \in B^*$  die Zufallsvariable  $(h, f) \mathcal{N}(0, |f|^2)$ -verteilt ist.*

Das Tripel  $(H, B, P)$  heißt **abstrakter Wienererraum**.

### *Beispiel*

Im Falle des »klassischen« Wienererraums gilt:  $H = H((0, 1))$  mit Dirichlet-Skalarprodukt,  $|\bullet| = \|\bullet\|_\infty$  und  $B = C_0^\infty([0, 1])$ . (s.o.)

Nun können wir das Gaußfeld definieren:

### Definition

Gegeben eine messbare Norm  $|\bullet|$  auf  $H(D)$  und  $B, B^*, \mathcal{B}$  wie oben. Dann ist das **durch die Norm  $|\bullet|$  definierte Gaußfeld** die eindeutige  $B$ -wertige,  $\mathcal{B}$ -meßbare ZV  $h$  mit der Eigenschaft, dass für jedes feste  $f \in B^*$  die Zufallsvariable  $(h, f)_\nabla$  eine Gaußsche ZV mit Varianz  $\|f\|_\nabla^2$  ist.

Äquivalent ist die Formulierung  $h = \sum \alpha_i f_i$  mit  $\alpha_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und  $f_i \in B$ , wenn die  $f_i$  eine  $H(D)$ -ONB bilden – diese Summe ist im Raum  $B$  definiert.

## Wahl einer messbaren Norm

Eine natürliche Familie messbarer Normen auf  $H(D)$  können durch die Eigenwerte des Laplace-Operators erzeugt werden.

Seien  $\{e_i\}$  die Eigenvektoren des Laplace-Operators auf  $D$ , die eine ONB des  $L^2(D)$  (mit Standardskalarprodukt) bilden und negative Eigenwerte  $\{\lambda_i\}$  haben. Dann ist eine ONB von  $H(D)$  gegeben durch  $f_i = (-\lambda_i)^{-1/2}e_i$ , da mit partieller Integration gilt:

$$\begin{aligned}(e_i, e_j)_\nabla &= (e_i, -\Delta e_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j, \\ (f_i, f_i)_\nabla &= \left( (-\lambda_i)^{-1/2}e_i, (-\lambda_i)^{1/2}e_i \right) = 1.\end{aligned}$$

Über  $(-\Delta)^a \sum \beta_i e_i := \sum (-\lambda)^a \beta_i e_i$  und  $\mathcal{L}_a(D) := (-\Delta)^a L^2(D)$  ist die Schreibweise  $H(D) = \mathcal{L}_{-1/2}(D)$  möglich. Damit erhalten wir  $(h, \bullet)$  als zufälliges stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{L}_{-b}(D)$ , falls  $b > \frac{d-2}{4}$ .

## Wahl einer messbaren Norm

Eine natürliche Familie messbarer Normen auf  $H(D)$  können durch die Eigenwerte des Laplace-Operators erzeugt werden.

Seien  $\{e_i\}$  die Eigenvektoren des Laplace-Operators auf  $D$ , die eine ONB des  $L^2(D)$  (mit Standardskalarprodukt) bilden und negative Eigenwerte  $\{\lambda_i\}$  haben. Dann ist eine ONB von  $H(D)$  gegeben durch  $f_i = (-\lambda_i)^{-1/2}e_i$ , da mit partieller Integration gilt:

$$\begin{aligned}(e_i, e_j)_\nabla &= (e_i, -\Delta e_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j, \\ (f_i, f_i)_\nabla &= \left( (-\lambda_i)^{-1/2}e_i, (-\lambda_i)^{1/2}e_i \right) = 1.\end{aligned}$$

Über  $(-\Delta)^a \sum \beta_i e_i := \sum (-\lambda)^a \beta_i e_i$  und  $\mathcal{L}_a(D) := (-\Delta)^a L^2(D)$  ist die Schreibweise  $H(D) = \mathcal{L}_{-1/2}(D)$  möglich. Damit erhalten wir  $(h, \bullet)$  als zufälliges stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{L}_{-b}(D)$ , falls  $b > \frac{d-2}{4}$ .

## Alternative Definition

Die Definition über die Begriffe des abstrakten Wienertraums hat zwei Nachteile:

- Die Wahl der Norm ist in gewissem Sinne beliebig, und
- Die ZV  $(h, f)_{\nabla}$  ist nicht für alle  $f \in H(D)$  definiert.

Über den folgenden Ansatz wird  $(h, \bullet)_{\nabla}$  wohldefiniert als ZV für jedes  $f \in H(D)$  – allerdings ist damit die Definition eines stetigen Funktionals  $f \rightarrow (h, f)_{\nabla}$  nicht mehr möglich.

Wir fassen kurz zusammen:

Betrachte den  $W$ -raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  mit  $\Omega = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathcal{F}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, in der die Koordinatenprojektionen  $\alpha \rightarrow \alpha_i$  messbar sind und  $\mu$  das  $W$ -maß, in dem  $\alpha_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gilt.

## Alternative Definition

Die Definition über die Begriffe des abstrakten Wienerraums hat zwei Nachteile:

- Die Wahl der Norm ist in gewissem Sinne beliebig, und
- Die ZV  $(h, f)_{\nabla}$  ist nicht für alle  $f \in H(D)$  definiert.

Über den folgenden Ansatz wird  $(h, \bullet)_{\nabla}$  wohldefiniert als ZV für jedes  $f \in H(D)$  – allerdings ist damit die Definition eines stetigen Funktionals  $f \rightarrow (h, f)_{\nabla}$  nicht mehr möglich.

Wir fassen kurz zusammen:

Betrachte den W'raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  mit  $\Omega = \{\alpha \mid \alpha = (\alpha_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathcal{F}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, in der die Koordinatenprojektionen  $\alpha \rightarrow \alpha_i$  messbar sind und  $\mu$  das W'maß, in dem  $\alpha_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gilt.

Bislang haben wir das Gaußfeld als formelle Summe  $h = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$  (konvergiert erst in  $B$ ) definiert, wobei die  $f_i$  eine geordnete ONB für  $H(D)$  sind und  $\alpha_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  i.i.d.

Nun kann für jedes feste  $f \in H(D)$ ,  $f = \sum \beta_i f_i$  die ZV  $(h, f)_{\nabla}$  f.s. als Grenzwert der Partialsummen  $\sum_{i=1}^k \beta_i \alpha_i$  wohldefiniert werden.  
Achtung: Die Folge  $\beta_i \alpha_i$  muss nicht f.s. absolutsummierbar sein!

Dann erhalten wir:

### Definition

Das **von der geordneten ONB  $\{f_i\}$  abgeleitete Gaußfeld** ist die indizierte Kollektion  $\mathcal{G}(D)$  von ZVn  $(h, f)_{\nabla}$  nach obenstehender Konstruktion.

# Gaußscher Hilbertraum

Eine abstraktere Definition, die keine spezielle Basis oder Ordnung benötigt, ist wie folgt:

## Definition

Ein **linearer Gaußraum** (Gaussian linear space) ist ein reeller linearer Raum von ZVn auf einem beliebigen W'raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , sodass jede Variable in diesem Raum eine zentrierte Gaußvariable ist.

Ein **Gaußscher Hilbertraum** ist ein vollständiger linearer Gaußraum, d.h. ein abgeschlossener Teilraum von  $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  bestehend aus Gaußvariablen, die das Standard-Skalarprodukt  $(X, Y) = \int X Y d\mu$  erben.

# Gaußscher Hilbertraum

Eine abstraktere Definition, die keine spezielle Basis oder Ordnung benötigt, ist wie folgt:

## Definition

Ein **linearer Gaußraum** (Gaussian linear space) ist ein reeller linearer Raum von ZVn auf einem beliebigen W'raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , sodass jede Variable in diesem Raum eine zentrierte Gaußvariable ist.

Ein **Gaußscher Hilbertraum** ist ein vollständiger linearer Gaußraum, d.h. ein abgeschlossener Teilraum von  $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  bestehend aus Gaußvariablen, die das Standard-Skalarprodukt  $(X, Y) = \int X Y d\mu$  erben.

Falls  $X_1, \dots, X_n$  reellwertige ZVn sind mit der Eigenschaft, dass alle Linearkombinationen zentrierte Gaußvariablen sind, dann ist die gemeinsame Verteilung der  $X_i$  durch die Kovarianzen  $\text{Cov}[X_i, X_j] = \mathbb{E}[X_i \cdot X_j]$  vorgegeben und dies ist eine lineare Transformation der Standard-Normalverteilung.

Dies gilt auch hier:

### Definition

Ein **Gaußfeld** (Gaussian free field) ist ein Gaußscher Hilbertraum  $\mathcal{G}(D)$  von ZV notiert als  $\gg(h, f)_\nabla\ll$  – eine ZV für jedes  $f \in H(D)$  – der das Dirichlet-Skalarprodukt auf  $H(D)$  erbt, d.h.

$$\mathbb{E}[(h, a)_\nabla (h, b)_\nabla] = (a, b)_\nabla$$

Mit anderen Worten:

Die Abbildung  $f \rightarrow (h, f)_{\nabla}$  ist eine skalarprodukt-erhaltende Abb. von  $H(D)$  nach  $\mathcal{G}(D)$ .

Wegen  $(a, b) = \frac{1}{2}[(a + b, a + b) - (a, a) - (b, b)]$  ist die Abbildung genau dann skalarprodukt-erhaltend, wenn sie linear und normerhaltend ist, d.h. die Varianz von  $(h, f)_{\nabla}$  ist  $(f, f)_{\nabla}$  für alle  $f \in H(D)$ . Damit erhalten wir

### *Bemerkung*

Ein  $H(D)$ -indizierter linearer Raum von ZVn  $(h, f)_{\nabla}$  ist genau dann ein Gaußfeld, wenn die Abbildung von  $f \in H(D)$  nach  $(h, f)_{\nabla}$  linear ist und jedes  $(h, f)_{\nabla} \sim \mathcal{N}(0, \|f\|_{\nabla}^2)$

## Mittelwert auf $h$

Wenn  $-\Delta a = \rho$  konstant auf einer offenen Menge  $D' \subset D$  und  $= 0$  außerhalb  $D'$  (d.h.  $a$  ist dort harmonisch), dann ist  $(h, a)_{\nabla} = (h, \rho)$  anschaulich als Mittelwert auf  $D'$  interpretierbar.

### *Idee für Gaußfeld $h$*

Auch wenn  $h$  so stark schwankend ist, dass es nicht als Funktion wohldefiniert ist, so ist dennoch eine Definition von »Mittelwert von  $h$  auf  $D'$ « möglich.

Da Hilberträume selbstdual sind, gilt:

Ist  $\rho$  ein  $W$ -maß auf  $D$ , für das  $f \rightarrow \rho f := \int f d\rho$  ein stetiges lineares Funktional auf  $H(D)$  ist (d.h.  $\sum [\rho f_j]^2 < \infty$ ),

so existiert ein  $f \in H(D)$ , für das  $\rho g = (f, g)_{\nabla}$  für alle  $g \in H(D)$  gilt.

Somit erhalten wir:  $\rho = -\Delta f \in \Delta H(D)$ .

## Mittelwert auf $h$

Wenn  $-\Delta a = \rho$  konstant auf einer offenen Menge  $D' \subset D$  und  $= 0$  außerhalb  $D'$  (d.h.  $a$  ist dort harmonisch), dann ist  $(h, a)_{\nabla} = (h, \rho)$  anschaulich als Mittelwert auf  $D'$  interpretierbar.

### *Idee für Gaußfeld $h$*

Auch wenn  $h$  so stark schwankend ist, dass es nicht als Funktion wohldefiniert ist, so ist dennoch eine Definition von »Mittelwert von  $h$  auf  $D'$ « möglich.

Da Hilberträume selbstdual sind, gilt:

Ist  $\rho$  ein  $W'$ maß auf  $D$ , für das  $f \rightarrow \rho f := \int f d\rho$  ein stetiges lineares Funktional auf  $H(D)$  ist (d.h.  $\sum [\rho f_j]^2 < \infty$ ),

so existiert ein  $f \in H(D)$ , für das  $\rho g = (f, g)_{\nabla}$  für alle  $g \in H(D)$  gilt.

Somit erhalten wir:  $\rho = -\Delta f \in \Delta H(D)$ .

## Analogon zur Markoveigenschaft

Wenn  $H_1$  und  $H_2$  zwei abgeschlossene orthogonale Teilmengen von  $H(D)$ , dann ist  $(h, \bullet)_\nabla$  eingeschränkt auf die beiden Teilmengen unabhängig.

Präziser bezeichne  $\mathcal{F}_{H_i}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra in der  $h \rightarrow (h, f)_\nabla$  eine messbare Funktion für jedes  $f \in H_i$  ist. Dann erzeugen  $\mathcal{F}_{H_1}$  und  $\mathcal{F}_{H_2}$  zusammen  $\mathcal{F}$ , und  $\mu$  ist auf den Teilräumen unabhängig.

Zum Beispiel betrachte  $H_U(D)$  und  $H_U^\perp(D)$  mit  $U \subseteq D$ ,  
 $a \in H_U(D) \Leftrightarrow \text{supp } a = U$ ,  $b \in H_U^\perp(D) \Leftrightarrow b$  ist harmonisch auf  $U$ .  
( $H_U(D)$  und  $H_U^\perp(D)$  sind orthogonal wegen  $(a, b)_\nabla = (a, -\Delta b) = 0$ .)

*Interpretation der Unabhängigkeit des Gaußfelds auf  $\mathcal{F}_U$  und  $\mathcal{F}_U^\perp$*

**Gegeben** die Werte von  $h$  außerhalb von  $U$ , dann ist die Verteilung der Werte von  $h$  in  $U$  eine harmonische Erweiterung auf  $\partial U$  plus einem unabhängigen Gaußfeld auf  $U$ . Dies wird auch als **Markoveigenschaft** bezeichnet.

## Analogon zur Markoveigenschaft

Wenn  $H_1$  und  $H_2$  zwei abgeschlossene orthogonale Teilmengen von  $H(D)$ , dann ist  $(h, \bullet)_\nabla$  eingeschränkt auf die beiden Teilmengen unabhängig.

Präziser bezeichne  $\mathcal{F}_{H_i}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra in der  $h \rightarrow (h, f)_\nabla$  eine messbare Funktion für jedes  $f \in H_i$  ist. Dann erzeugen  $\mathcal{F}_{H_1}$  und  $\mathcal{F}_{H_2}$  zusammen  $\mathcal{F}$ , und  $\mu$  ist auf den Teilräumen unabhängig.

Zum Beispiel betrachte  $H_U(D)$  und  $H_U^\perp(D)$  mit  $U \subseteq D$ ,  
 $a \in H_U(D) \Leftrightarrow \text{supp } a = U$ ,  $b \in H_U^\perp(D) \Leftrightarrow b$  ist harmonisch auf  $U$ .  
 $(H_U(D)$  und  $H_U^\perp(D)$  sind orthogonal wegen  $(a, b)_\nabla = (a, -\Delta b) = 0$ .)

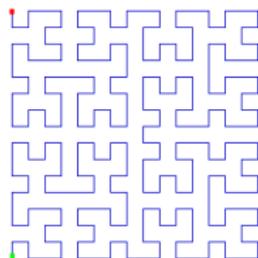
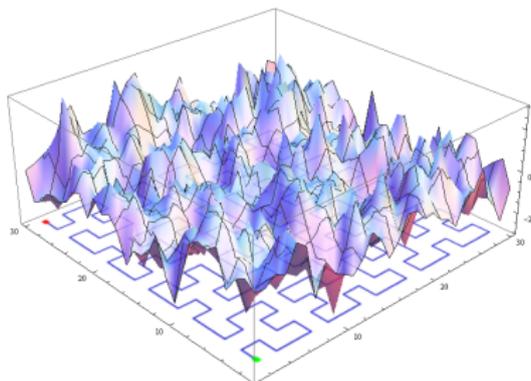
*Interpretation der Unabhängigkeit des Gaußfelds auf  $\mathcal{F}_U$  und  $\mathcal{F}_U^\perp$*

**Gegeben** die Werte von  $h$  außerhalb von  $U$ , dann ist die Verteilung der Werte von  $h$  in  $U$  eine harmonische Erweiterung auf  $\partial U$  plus einem unabhängigen Gaußfeld auf  $U$ . Dies wird auch als **Markoveigenschaft** bezeichnet.

# Zusammenhang zwischen BM und GFF

## Idee

»Erkunde« das Gaußfeld  $h$  entlang einer raumfüllenden Kurve  $\gamma$ . Der Verlauf der Brownschen Bewegung wird dadurch bestimmt, ob der nächste »ausgelesene« Wert größer oder kleiner ist als erwartet. Dann kann jede ZV  $(h, f)_{\nabla}$  als stochastisches Integral dieser Brownschen Bewegung gesehen werden.



# Rigoreuse Konstruktion

Wähle  $f_0$  mit  $\Delta f_0 = c < 0$  auf  $D$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  eine stetige raumfüllende Kurve, und  $\gamma_t := \gamma([0, t])$ . Sei  $P_t$  die Projektion auf den Teilraum  $H_{D \setminus \gamma_t}^\perp$  der auf  $D \setminus \gamma_t$  harmonischen Funktionen.

Durch Zerlegung von  $f_0$  in die Projektionen auf die komplementären Teilräume  $\mathcal{F}_{D \setminus \gamma_t}^\perp$  und  $\mathcal{F}_{D \setminus \gamma_t}$  erhalten wir

$$W(t) := \mathbb{E} \left[ (h, f_0)_\nabla \mid \mathcal{F}_{D \setminus \gamma_t}^\perp \right] = (h, P_t(f_0))_\nabla.$$

$W(t)$  ist ein Martingal,  $W(t) - W(s)$  ist normalverteilt mit Varianz  $|t - s|$ , hat also dieselbe Verteilung wie eine Brownsche Bewegung.

Da die lineare Hülle der Funktionen  $P_t(f_0)$  dicht in  $H(D)$  liegt, kann man f.s.  $(h, f_j)$  für alle  $j$  definieren. Damit folgt die Verallgemeinerung

$$W_f(t) = \mathbb{E} \left[ (h, f)_\nabla \mid \mathcal{F}_{D \setminus \gamma_t}^\perp \right] = (h, P_t(f))_\nabla.$$

## Rigoreuse Konstruktion

Wähle  $f_0$  mit  $\Delta f_0 = c < 0$  auf  $D$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  eine stetige raumfüllende Kurve, und  $\gamma_t := \gamma([0, t])$ . Sei  $P_t$  die Projektion auf den Teilraum  $H_{D \setminus \gamma_t}^\perp$  der auf  $D \setminus \gamma_t$  harmonischen Funktionen.

Durch Zerlegung von  $f_0$  in die Projektionen auf die komplementären Teilräume  $\mathcal{F}_{D \setminus \gamma_t}^\perp$  und  $\mathcal{F}_{D \setminus \gamma_t}$  erhalten wir

$$W(t) := \mathbb{E} \left[ (h, f_0)_\nabla \mid \mathcal{F}_{D \setminus \gamma_t}^\perp \right] = (h, P_t(f_0))_\nabla.$$

$W(t)$  ist ein Martingal,  $W(t) - W(s)$  ist normalverteilt mit Varianz  $|t - s|$ , hat also dieselbe Verteilung wie eine Brownsche Bewegung.

Da die lineare Hülle der Funktionen  $P_t(f_0)$  dicht in  $H(D)$  liegt, kann man f.s.  $(h, f_j)$  für alle  $j$  definieren. Damit folgt die Verallgemeinerung

$$W_f(t) = \mathbb{E} \left[ (h, f)_\nabla \mid \mathcal{F}_{D \setminus \gamma_t}^\perp \right] = (h, P_t(f))_\nabla.$$

## Gaußfeld auf dem Einheitsstorus

Sei  $D$  der Einheitsstorus  $\mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ . Sei  $H_s(D)$  die Menge der glatten Funktionen auf  $D$  mit Mittelwert 0 und sei  $H(D)$  der Hilbertraum-Abschluss.

Eine ONB für die komplexe Version von  $H(D)$  ist durch die Eigenwerte des Laplace-Operators  $\Delta$  gegeben, welche die Form

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi|k|} e^{2\pi i x \cdot k}$$

für  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  haben.

Somit ist das komplexe Gaußfeld  $h$  auf  $D$  eine zufällige Verteilung, deren Fourier-Transformation aus i.i.d. komplexen normalverteilten ZVn multipliziert mit  $\frac{1}{2\pi|k|}$  besteht.

Für  $d = 1$  ist der Grenzwert  $h$  f.s. definiert und hat dieselbe Verteilung wie ein Vielfaches einer Brownschen Brücke. Wir können also die Brownsche Brücke als eindimensionales Gaußfeld ansehen.

## Gaußfeld auf dem Einheitsstorus

Sei  $D$  der Einheitsstorus  $\mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ . Sei  $H_s(D)$  die Menge der glatten Funktionen auf  $D$  mit Mittelwert 0 und sei  $H(D)$  der Hilbertraum-Abschluss.

Eine ONB für die komplexe Version von  $H(D)$  ist durch die Eigenwerte des Laplace-Operators  $\Delta$  gegeben, welche die Form

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi|k|} e^{2\pi i x \cdot k}$$

für  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  haben.

Somit ist das komplexe Gaußfeld  $h$  auf  $D$  eine zufällige Verteilung, deren Fourier-Transformation aus i.i.d. komplexen normalverteilten ZVn multipliziert mit  $\frac{1}{2\pi|k|}$  besteht.

Für  $d = 1$  ist der Grenzwert  $h$  f.s. definiert und hat dieselbe Verteilung wie ein Vielfaches einer Brownschen Brücke. Wir können also die Brownsche Brücke als eindimensionales Gaußfeld ansehen.

## Gaußfeld auf dem Einheitsstorus

Sei  $D$  der Einheitsstorus  $\mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ . Sei  $H_s(D)$  die Menge der glatten Funktionen auf  $D$  mit Mittelwert 0 und sei  $H(D)$  der Hilbertraum-Abschluss.

Eine ONB für die komplexe Version von  $H(D)$  ist durch die Eigenwerte des Laplace-Operators  $\Delta$  gegeben, welche die Form

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi|k|} e^{2\pi i x \cdot k}$$

für  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  haben.

Somit ist das komplexe Gaußfeld  $h$  auf  $D$  eine zufällige Verteilung, deren Fourier-Transformation aus i.i.d. komplexen normalverteilten ZVn multipliziert mit  $\frac{1}{2\pi|k|}$  besteht.

Für  $d = 1$  ist der Grenzwert  $h$  f.s. definiert und hat dieselbe Verteilung wie ein Vielfaches einer Brownschen Brücke. Wir können also die Brownsche Brücke als eindimensionales Gaußfeld ansehen.

# Diskretisierung

Sei  $\Lambda$  ein endlicher Graph mit positiver Gewichtsfunktion  $w$  auf den Kanten. Definiere:

$$(f, g)_{\nabla} = \sum_{e=(x,y)} w(e) \cdot [f(y) - f(x)] \cdot [g(y) - g(x)]$$

Nun »fixiere« einen Rand  $\partial\Lambda$ , dann ist die Menge  $H(\Lambda)$  der reellwertigen Funktionen, die auf  $\partial\Lambda$  verschwindet (bzw. feste Werte annimmt), ein  $(|\Lambda| - |\partial\Lambda|)$ -dimensionaler Hilbertraum unter dem Dirichlet-Skalarprodukt.

Wenn  $\Lambda$  eine große Teilmenge eines  $d$ -dim. Gitters  $L$  ist und  $\partial\Lambda$  die Menge der Knoten, die Randpunkte auf  $L \setminus \Lambda$  sind, dann heißt das so entstandene Modell **diskretes Gaußfeld (DGFF)** bzw. **harmonic crystal**.

# Diskretisierung

Sei  $\Lambda$  ein endlicher Graph mit positiver Gewichtsfunktion  $w$  auf den Kanten. Definiere:

$$(f, g)_{\nabla} = \sum_{e=(x,y)} w(e) \cdot [f(y) - f(x)] \cdot [g(y) - g(x)]$$

Nun »fixiere« einen Rand  $\partial\Lambda$ , dann ist die Menge  $H(\Lambda)$  der reellwertigen Funktionen, die auf  $\partial\Lambda$  verschwindet (bzw. feste Werte annimmt), ein  $(|\Lambda| - |\partial\Lambda|)$ -dimensionaler Hilbertraum unter dem Dirichlet-Skalarprodukt.

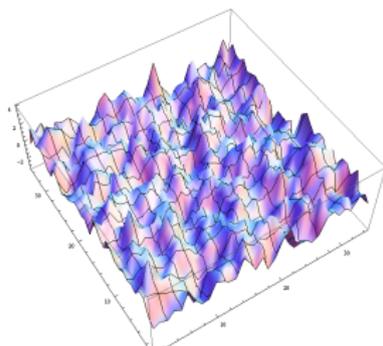
Wenn  $\Lambda$  eine große Teilmenge eines  $d$ -dim. Gitters  $L$  ist und  $\partial\Lambda$  die Menge der Knoten, die Randpunkte auf  $L \setminus \Lambda$  sind, dann heißt das so entstandene Modell **diskretes Gaußfeld (DGFF)** bzw. **harmonic crystal**.

## Simulation: Algorithmus

Wir erinnern uns an das Beispiel auf dem Einheitstorus:

Das komplexe Gaußfeld  $h$  auf  $D$  ist eine zufällige Verteilung, deren Fourier-Transformation aus i.i.d. komplexen normalverteilten ZVn multipliziert mit  $\frac{1}{2\pi|k|}$  besteht.

Genauso wird das Gaußfeld auch simuliert – wir simulieren komplexe i.i.d. normalverteilte Zufallsvariablen, normieren diese mit den Eigenwerten des (diskreten) Laplace-Operators und wenden darauf die Fourier-Transformation an.

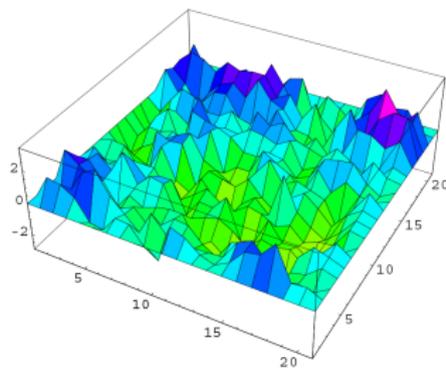


# Verfeinerungen

Wir möchten nun für das Gaußfeld  $h$  noch Randbedingungen festlegen. Das dadurch entstandene Feld heiße  $\tilde{h}$  mit  $\tilde{h} = 0$  auf  $\partial D$ .

Wir suchen also eine harmonische Interpolation für  $\tilde{h}$ . Betrachte dazu  $h_0 := \tilde{h} + h$ , dann müssen wir folgendes Dirichlet-Problem lösen:

$$\begin{aligned}\Delta h_0 &= 0 && \text{auf } D \\ h_0 &= h && \text{auf } \partial D\end{aligned}$$

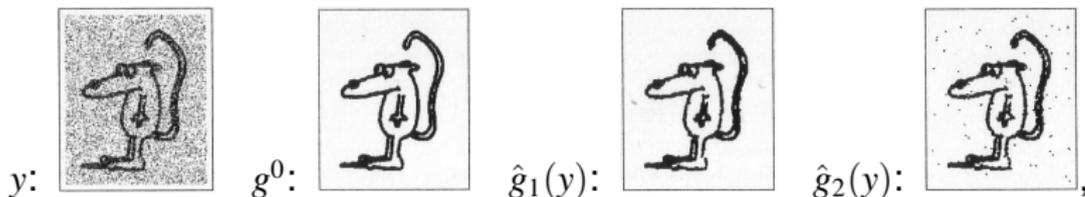


## Ausblick: Bildverarbeitung

Wir betrachten ein zweidimensionales Gitter  $S$  von »Pixeln«  $s, t, \dots$ .  
Eine Kollektion  $y = (y_s)_{s \in S}$  von Belegungen  $y_s$  heißt »Konfiguration«,  
»Signal« oder auch »Bild«.

Vereinfachend sei  $y_s \in \{1, -1\}$  mit 1 für schwarz und  $-1$  für weiß.

**Beispiel:**



wobei  $y$  die »Beobachtung«,  $g^0$  das »Original« und  $\hat{g}_i$   
»Rekonstruktionen« sind.

**Problem:** Güte einer allg. Rekonstruktion  $g$ ?

Erster Ansatz: Abweichung von der Beobachtung  
(»Hamming-Distanz«):

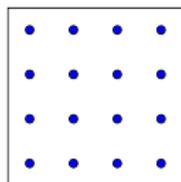
$$d(g, y) = |\{s \in S \mid g_s \neq y_s\}|$$

Für stärkere Gewichtung setze  $D(g, y) = 2 \cdot d(g, y) - |S|$ .

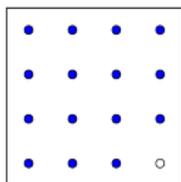
*Weiteres Kriterium:*

Verhältnis ungleichfarbiger zu gleichfarbigen Nachbarn:

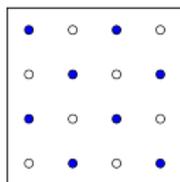
$$K(g) = - \sum_{s \sim t} g_s g_t$$



hervorragend



akzeptabel



chaotisch

$$(K(g) = -24, -20, 24)$$

Betrachte dann

$$H(g, y) = K(g) + D(g, y) = -\beta \sum_{s \sim t} g_s g_t - \sum_s g_s y_s$$

Ein Bild  $g$  mit niedrigem Wert  $H(g, y)$  entspricht (hoffentlich) dem Original hinreichend gut. Wir suchen also einen guten Minimierer für  $H(\bullet, y)$ .

Durch Einbeziehung weiterer Parameter und Terme können wir das Modell erweitern:

$$H(g, y) = -\beta \sum_{s \sim t} g_s g_t + h \sum_s g_s + c \sum_s g_s y_s$$

Hier gibt der mittlere Term einen Drift zur Einfarbigkeit (abhängig vom Vorzeichen von  $h$ ) und  $c$  steuert den Einfluss der Beobachtung.

Dies ist eine Instanz des **Ising-Modells**, welches (nicht nur) in der Bildanalyse eine zentrale Rolle spielt...

# Schlußwort

Die Folien dieses Vortrags sowie eine Aufbereitung der Inhalte in einem druckerfreundlichen Format sind auch im Internet abrufbar unter:

*[www.grohganz.de/stochastic.html](http://www.grohganz.de/stochastic.html)*

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.

## Literaturverzeichnis

- NEUHAUSER, CLAUDIA und PACALA, STEPHEN W.:  
An explicitly spatial version of the Lotka-Volterra model with interspecific competition.  
Ann. Appl. Prob., Vol 9., No. 4, 1226-1259,  
*Online unter: [projecteuclid.org/euclid.aoap/1029962871](http://projecteuclid.org/euclid.aoap/1029962871)*
- SHEFFIELD, SCOTT (2006):  
Gaussian free fields for mathematicians  
arXiv: math/0312099v3, [arxiv.org/abs/math/0312099v3](http://arxiv.org/abs/math/0312099v3)
- EBERLE, ANDREAS Sommersemester 2007:  
Vorlesung »Stochastische Prozesse«  
Universität Bonn, Institut für angewandte Mathematik.

## Weiterführende Literatur

- GROSS, LEONARD:  
Abstract Wiener Spaces.  
Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability  
(Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability  
Theory, Part 1, p. 31-42. Univ. California Press, Berkeley, Calif.,  
1967.  
*Online unter: [projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200513262](http://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200513262)*
- JANSEN, SVANTE:  
Gaussian Hilbert Spaces.  
Cambridge University Press, Cambridge, 1997.  
*Steht im Lesesaal.*
- WINKLER, GERHARD  
Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo  
Methods: A Mathematical Introduction  
Springer; Second edition, 2006. ISBN: 3540442138.  
*Steht in der Stochastik-Bibliothek des IAM.*