

## Protokoll einer Vordiplomprüfung über „Lineare Algebra I+II“ und „Gruppen, Ringe, Moduln“

Prüfer: Prof. Franke  
Beisitzer: Jakob Balcerak  
Datum: 13.10.2008  
Dauer: ca. 30 Minuten

- Rang der nebenstehenden 3x3-Matrix bestimmen 123
- Aussagen über Lösbarkeit für zugehörige inhomogene Gleichungssysteme 234  
345
- positiv definit? Nein, da Rang=2.
- indefinit?
- geometrische Interpretation? Matrix symmetrisch, wg.  $\det(\ )=0$  zugehörige BLF ausgeartet, Signatur=(1,1) (d.h. 1,-1,0 in der Normalform nach Sylvester) mit eindimensionalem Radikal, beschreibt geometrisch „Hyperbel-Zylinder“
- währenddessen auch über Hyperbeln und Ellipsen im 2-Dimensionalen sowie Hyperboloide und „Ellipsen-Zylinder“ im 3-Dimensionalen gesprochen
- wodurch wird der Abstand zwischen den zwei Komponenten des „Hyperbel-Zylinders“ beschrieben? ->Bedeutung der Eigenwerte
- Beweis der Dimensionsformel für Kern und Bild (alternativ: Existenz einer ONB für selbstadj. Endomorphismen)
- Anzahl endlicher abelscher Gruppen der Ordnung 18? (habe sie auch angegeben)
- Welche möglichen Jordannormalformen gibt es für das charakteristische Polynom  $X^2(X-1)$ ?
- Zusammenhang der letzten beiden Fragen? -> Elementarteilersatz, Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen
- Beweis, dass abelsche Gruppen in einen freien und einen Torsionsanteil zerlegbar sind, oder alternativ, warum  $k[X]$  faktoriell ist. (Die erste Aussage habe ich zwar angeschrieben und kurz den Zusammenhang zum oben erwähnten Hauptsatzes und dem Elementarteilersatz erläutert, dann aber dennoch bewiesen, dass  $k[X]$  euklidisch, also insbesondere faktoriell ist.)

Auf Prüfungen bei Herrn Franke kann man sich i.A. anhand der (zahlreichen) Protokolle relativ gut vorbereiten, würde ich behaupten.

Dennoch hatte ich nicht damit gerechnet, dass er mich über die geometrische Bedeutung symmetrischer Bilinearformen im ausgearteten Fall prüfen würde, denn bei der Vorbesprechung hatte er sich explizit auf den nichtausgearteten Fall beschränkt (stattdessen den Unterschied zwischen ein- und zweischaligem Hyperboloid hervorgehoben). In diesem Themenkreis habe ich vieles nicht sofort gewusst oder manches gar „geraten“ bzw. erschlossen.

Ihm schien vermutlich bewusst gewesen zu sein, dass er sich nicht an die vorige Themenabsprache gehalten hat, da er mir eine Eins für die Prüfung gegeben hat.