Diplomprüfungsprotokoll Wissenschaftliches Rechnen I + II
(Schwerpunktsprüfung)

18.04.2008

Prüfer: Prof. Dr. Michael Griebel   Beisitzer: Jürgen Braun

Prüfungsdauer: 40 Minuten   Note: 1.0

Prüfungsverlauf

1 Poissonproblem in 2D

Herr Griebel schrieb als Erstes das Poisson-Problem $-\Delta u = f$ auf $\Omega = [0,1]^2$ mit Randbedingungen $u_\Gamma = 0$ mit $\Gamma = \partial\Omega$ auf den Zettel und fragte mich nach Lösbarkeit und Eindeutigkeit des Problems. (eindeutige Lösung) Er fragte daraufhin nach dem Grund und ich verwies auf die eindeutige Lösung der schwachen Form, welche ich dann herleitete. (Multiplikation mit Testfunktion, Integration über Ω, partielle Integration nach 1. Green'schen Satz). Ich sagte, dass man den Testraum V dann gerade mit Nullrandbedingung wählt, damit zum Einen das Randintegral verschwindet und zum anderen die Dirichletrandbedingung von u erfüllt ist. (Man kann also Ansatzraum = Testraum fordern) Nun nannte ich den Satz von Lax-Milgram, der die eindeutige Lösbarkeit des Problems garantiert und aussagt, dass die Lösung des schwachen Problems auch eine Lösung der starken Form ist, sofern die Bilinearform auf der linken Seite des schwachen Problems V-elliptisch ist, beschränkt (und damit stetig) ist und die rechte Seite (aufgefasst als Operator im Dualraum V^* von V) beschränkt ist.

2 Diskretisierung/Finite Elemente

Als nächstes wollte Herr Griebel, dass ich das Ganze diskretisiere und ich leitete die Form der Steifigkeitsmatrix und des Gleichungssystems her. (Zunächst allgemein für beliebigen diskreten Testraum $V_h \subset V$ und einen beliebigen Ansatzraum) Danach verwies ich darauf, dass für die Wahl Ansatzraum = Testraum die Steifigkeitsmatrix positiv definit (aufgrund der V-Elliptizität) und symmetrisch ist. Somit ist auch das diskrete Ritz-Galerkin-Problem eindeutig lösbar und das LGS ist geeignet für iterative Verfahren.

3 Mehrgitter

Nun sollte ich das Mehrgitter-Verfahren erläutern und schrieb zunächst den Mehrgitter-Algorithmus auf. Nachdem ich erklärte, dass die hochfrequenten Fehleranteile vom Feingitterglätter heruntergedrückt werden und danach die Grobgitterkorrektur vorgenommen wird, um den niederfrequenten Fehleranteil in den Griff zu bekommen, erläuterte ich noch warum der Mehrgitter-Algorithmus den Aufwand $O(N \cdot log(N))$ hat. (Anzahl rekursiver Aufrufe in einem Schritt γ = Reduktionsrate der Freiheitsgrade vom feinen auf das nächstgröbere Gitter $\eta = 2^{dim} \rightarrow c \cdot N$ Operationen auf jedem der (maximal) $log(N)$ Level.) Nun erläuterte ich noch die FAS-Methode (Full Approximation Storage) (primale statt duale Restriktion $\rightarrow$ direktes Approximieren von u_{k-1}, nicht mehr des Fehlers e_{k-1} $\rightarrow$ eignet sich für adaptive Verfahren). Zum Schluss erklärte ich noch, dass die FMG-Methode (Full Multigrid) mit $O(N)$ Aufwand läuft, da man hier nur ein bis zwei V-Zyklen benötigt.

Nun sollte ich noch den Konvergenzbeweis für das 2-Level-Verfahren vorführen und definierte Approximations- und Glättungseigenschaft. Ich erläuterte dann noch, dass $\|A_k \cdot e_k\|_2$ ein gutes Maß für die Glättung des hochfrequenten Anteils ist, da bei Entwicklung von e_k in der Eigenbasis von A_k hier gerade die hochfrequenten Anteile verstärkt würden (durch große Eigenwerte).

4 H_1-Abschätzung des Finite-Elemente-Fehlers

Ich sollte den H_1-Fehler angeben und schrieb die Ungleichung $\|u - u_h\|_{H^1} \leq c \cdot h^{m-1} \cdot |u|_{H^m} \leq c_2 \cdot h^{m-1} \cdot \|f\|_{H^{m-2}}$ hin (gilt nur, falls das Problem H^s-regulär ist). Ich erläuterte ganz kurz den Weg über Cea-Lemma, Interpolation, Bramble-Hilbert und Transformationssatz, da die Zeit schon weit fortgeschritten war. Dann sollte ich erklären, was man zum Beispiel bei einer einspringen Ecke machen könnte und ich erläuterte, dass man mit adaptiven Verfahren die Konvergenzrate retten kann. Dazu definierte ich dann asymptotische Exaktheit eines Fehlerschätzers und erklärte den Hierarchische Basis-Schätzer und wie man beweist, dass dieser zuverlässig und exakt ist.

5 Parallelisierung

Zuletzt warf Herr Griebel noch den Begriff der Lastbalancierung ein und wollte, dass ich dazu ein wenig sage. Ich definierte das Graphenabbildungsproblem und erläuterte die Nebenbedingung, welche hier gerade der Lastbalancierung entspricht. Ich warf ein, dass das Problem NP-vollständig ist und man somit gute Heuristiken benötigt, um das ganze wenigstens approximativ lösen zu können. Als Letztes erläuterte ich noch das Prinzip der spektralen Bisektion unter Verwendung der Laplace-Matrix und Anwenden des Theorems von Fiedler.

6 Fazit

Die Prüfungsatmosphäre war sehr entspannt. Herr Griebel ließ mich die gesamte Zeit frei erzählen und wechselte nur hin und wieder das Thema, wenn ein Bereich abgeschlossen war.

Vorbereitung: Zur Vorbereitung benutzte ich fast ausschließlich meine Mitschrift aus der Vorlesung. Lediglich für einige Finite-Element-Sätze zog ich den *Braess: Finite Elemente* zu Rate. Zur Vorbereitung auf die Parallelisierung hatte ich mir ein Vorlesungsskript aus früheren Jahrgängen besorgt.

Viel Glück bei euren Prüfungen