Prüfungsprotokoll:
Wahrscheinlichkeitstheorie I und Stochastische Prozesse

Prüfer: Prof. Dr. A. Eberle
Beisitzer: ...
Note: 1,0

Da ich schon gegen 9.40 Uhr im Institut war und Herr Eberle mich auf dem Flur stehen sah, fragte er, ob wir die Prüfung schon früher beginnen sollten. So legten wir also direkt los:

Er ließ mir zunächst freie Hand und ich fing an ein wenig über das **schwache Gesetz der großen Zahlen** zu erzählen und die unterschiedlichen Voraussetzungen bei den Gesetzen der großen Zahlen. Schließlich habe ich dann noch das schwache Gesetz der großen Zahlen für unkorrelierte L2-Zufallsvariablen X_i mit beschränkter Varianz bewiesen. Als ich mit dem starken L2-Gesetz fortfahren wollte, unterbrach mich Herr Eberle und fragte nach der **Konvergenzgeschwindigkeit** beim schwachen G.d.g.Z.. Ich erläuterte, dass diese in diesem Beweis äußerst schlecht sei (nämlich 1/n), dass man aber unter der Voraussetzung der exponentiellen Integrierbarkeit einer messbaren Funktion U mittels des Satzes von Chernoff diese für die Summe der U(X_i) erheblich verbessern kann und erläuterte zunächst die **Legendre-Transformation** (als Supremum über eine Funktion der logarithmisch Momentenerzeugenden), bevor ich den **Satz von Chernoff** ausführlich bewies. Er fragte, ob es auch andere Formen für die Legendre-Transformation gibt und ich erklärte, dass man mittels einer exponentiellen Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zeigen kann, dass die relative Entropie der exponentiellen Familie gegenüber dem Basismaß hier die Legendre-Transformation ist, woraufhin ich dann auch ausführlich den **Beweis des Satzes von Cramer** mittels Importance-Sampling und ZGS erklärte.

Herr Eberle wechselte dann das Thema und fragte mich, was ich denn so über **asymptotisches Verhalten von Markovketten** wüsste. Ich definierte Rekurrenz und Transienz und skizzierte, wie man zeigen kann, dass immer genau eine der beiden Eigenschaften vorliegt. Weiterhin erläuterte ich die Bedeutung der **Green'schen Funktion**, um Rekurrenz oder Transienz festzustellen. Als ich anfangen wollte Irreduzibilität zu erklären, fragte Herr Eberle, wie es denn mit **Beispielen zu Rekurrenz und Transienz** aussehen würde. Ich erklärte anhand des **Supermartingalkonvergenzsatzes** und der Stirling-Formel, dass der eindimensionale **Random Walk** rekurrent sei. Kurz erklärte ich noch, dass das **Kartenhaus**-Modell auf Z, unter der Bedingung der Summierbarkeit der Sprungwahrscheinlichkeiten zu 0, transient sei.
Herr Eberle fragte nun, wie es denn mit dem **mehrdimensionalen Random Walk** aussehen würde und ich erklärte, wieso der zweidimensionale Random Walk rekurrent ist und alle höherdimensionalen Random Walks transient sind.

Herr Eberle wollte nun wissen unter welchen **Voraussetzungen** es **invariante Wahrscheinlichkeitsverteilungen** gäbe und ich erläuterte den **Satz von Kac** und was dieser mit Rekurrenz und invarianten Verteilungen zu tun hatte. Als mir auffiel, dass der Satz von Kac eigentlich genau die falsche Richtung charakterisiert, wies ich daraufhin, dass man die andere Richtung mittels der **Markoveigenschaft** beweisen könnte, woraufhin Herr Eberle aber meinte, dass ich das nicht näher auszuführen bräuchte.

Herr Eberle fragte nun, wie es mit einer **invarianten Verteilung des Random Walks** aussehen würde. Ich geriet erst mal ein wenig ins Stocken und wollte irgendwie zeigen, dass der Erwartungswert der Stoppzeit unendlich groß ist, was mir aber nicht gelang. Nach einigen

Überlegungen, die zu nichts führten, gab mir Herr Eberle einen Tipp und sagte: „Welche Martingale hat denn der Random Walk?“ Ich führte als erstes S_n selbst an, welches aber offensichtlich zu keiner Lösung führt. Dann nannte ich $(S_n)^2 - n$ und erklärte, dass dies ein Martingal sei, da n der Varianzprozess von S_n sei. Nun schrieb ich eine Stoppzeit T für das Austreten aus einem Intervall (a,b) hin und erklärte, warum T fast sicher endlich ist und dass man so – bei Start in 0 – mittels des Stoppsatzes für Martingale erhält, dass $E[(S_T)^2] = E[T]$ ist (Beschränktheit des ersten Term und Monotonie des zweiten). Da nun S_n ebenfalls ein Martingal ist, erklärte ich, wie man zunächst die Verteilung von S_T ausrechnen kann und danach auf $E[T]$ kommt. Lässt man nun den Grenzwert einer der Intervallgrenzen gegen unendlich bzw. – unendlich gehen, erhält man den gewünschten Erwartungswert. Herr Eberle meinte dann: „Und was können Sie schließen, wenn dieser unendlich ist?“ – „Dass keine invariante Wahrscheinlichkeitsverteilung existiert.“

Dass ich mir die ganze Mühe hätte sparen können, fiel mir auf, als Herr Eberle fragte: „**Welche invarianten Maße hat denn der Random Walk?**“ Ich erklärte, dass diese alle von der Form $p(x) = a * x + b$ sein müssen. Was ich daraus schließen kann, wollte mir zunächst nicht einfallen, bis ich mir an den Kopf stieß, als Herr Eberle meinte „Signierte Maße sollten ja positiv sein...“. Ich erklärte also, warum $a = 0$ sein muss und jedes invariante Maß also – bis auf Konstante genau – das Zählmaß ist, welches auf Z nicht normierbar ist.

Als Letztes fragte Herr Eberle dann noch, was man tun könne, um eine **invariante WV** zu erhalten. Ich erklärte, dass man dem Random Walk einen Drift zu einem festen Punkt hin geben muss und wie eine invariante Verteilung dann aussieht und wieso sie normierbar ist. Schließlich kam noch die Frage „Geht so was auch in mehreren Dimensionen?“. Nach kurzer Überlegung antwortete ich mit „Ja“ und wollte gerade ein wenig Zeichnen, als Herr Eberle noch nachhakte „Und wie muss dann der Drift zur Mitte hin aussehen?“. Mit der Antwort, dass dieser mit der Zahl der Dimension steigen muss, gab er sich zufrieden und beendete die Prüfung.

Fazit: Herrn Eberle kann ich uneingeschränkt als Prüfer empfehlen, da er einen sehr frei erzählen lässt und nur unterbricht, wenn man nicht mehr weiter weiß oder falls genug zu einem Thema gesagt wurde. Selbst, wenn man etwas fertig erklärt hat, kann es sein, dass Herr Eberle zunächst nichts dazu sagt, damit man das umfassende selbst ein wenig weiter erläutern kann.

Bastian Bohn, 09.10.2007