

Prüfungsprotokoll

Reine Mathematik

Logik und Grundlagen der Mathematik

Prüfer: Prof. Dr. Peter Koepke
Beisitzer: Philipp Schlicht
Datum: 26. März 2009, 16:00 Uhr
Dauer: ~35 Minuten
Note: 1.0

Vorab besprochene Thematik:

Logik: Nach **Ebbinghaus** et al. „Einführung in die mathematische Logik“, bis einschließlich dem 1. Gödelschen Unvollständigkeitssatz

Mengenlehre: **Vorlesungsmitschrift** zu seiner Vorlesung „Mengenlehre I“ aus dem Wintersemester 2006/07

Generelle Anmerkung:

Ich habe beide Vorlesungen nicht besucht, sondern saß nur etwa ein halbes Semester in einer „Mengenlehre II“-Vorlesung. Generell ist zu sagen, dass für heuristische Zugänge (was tut man eigentlich) der Besuch der entsprechenden Vorlesungen bei Herrn Koepke äußerst sinnvoll ist...

Prüfungsverlauf:

Ich durfte entscheiden, ob ich mit Logik oder Mengenlehre anfangen möchte.

Logik:

Herr Koepke fragte nach dem **Hauptsatz der Logik**. Ich erläuterte erst die triviale Richtung. Hierzu wollte Herr Koepke dann wissen, bei welchen Regeln aus dem **Sequenzkalkül** „Schwierigkeiten“ auftreten könnten. Ich verwies auf die Quantorenregeln, er wollte dann auch eine Beweisskizze für beide sehen – grobe Heuristik reichte ihm, dass ich das technisch nicht konnte, schien ihn nicht sehr zu stören.

Dann wollte er **Beweisdetails für den Vollständigkeitssatz**: Folgerung aus Modellexistenzsatz, Satz von Henkin. Hier wollte er wissen, wie die Erweiterung auf eine Menge, die Bsp. enthält, funktioniert und eine Beweisskizze für die Erhaltung der Widerspruchsfreiheit. Da der Beweis sehr technisch ist, wusste ich nur noch, dass man eben die Regeln des Kalküls verwendet – er erklärte noch ein paar Details, wollte aber gar nicht soviel mehr dazu wissen. Danach kamen noch einige Erläuterungen zur Negationstreue – auch hier wieder der Hinweis, dass die Konstruktion durch die Kalkülregeln ermöglicht wird.

Dann wechselte er zum **1. Unvollständigkeitssatz**. Den hatte ich besser vorbereitet, schrieb die Aussage hin und erläuterte die Voraussetzungen. Die Beweisskizze brachte die das Lemma über die Nichtrepräsentierbarkeit der ableitbaren Formelmengen ein, hierzu verwies ich auf den Fixpunktsatz, in dessen Beweis Koepke dann abbrach. („Sie scheinen das zu können...“)

Mengenlehre:

Zuerst sollte ich einige **Begriffe zum Forcing** erklären: Generische Filter, dichte Mengen, $M[G]$ und die Definition der Interpretationen. Bei letzteren fragte er noch nach der Art der Rekursion – damit konnte ich nichts anfangen, er meinte auch nur, dass die rekursive Namensdef. über eine mehrfache epsilon-Relation definiert sei. Dann wollte er den **Beweis für den Filterexistenzsatz** sehen, hierzu verwies ich nur auf die Notwendigkeit der Abzählbarkeit (und dass man diese aus Löwenheim-Skolem erhält) und konnte nur eine sehr grobe Beweisskizze liefern. Herr Koepke erläuterte dann den Rest.

Anschließend fragte er nach **(Pot) in $M[G]$** . Zum Glück hatte ich das vorbereitet, allerdings fielen mir nur noch die Definitionen der beteiligten Mengen ein – mit ein wenig Heuristik, was man dann mit diesen Dingen veranstaltet, schien es aber zu reichen.

Dann kamen wir noch zum **Forcing von CH**: Ich erklärte kurz die Aussage, gab die verwendete Forcing-Halbordnung an und erläuterte, was das bedeutet. Die Konstruktion der Abbildung selber wollte er gar nicht sehen, er wollte noch auf die Kollabierung der Kardinalzahlen eingehen. Mit der Definition von abz. abg. tat ich mich etwas schwer, da ich die Definition teilweise mit der für die c.c.c. durcheinanderwarf. Der eigentliche Beweis ist recht einfach, wenn man einen technischen Satz (Eine Funktion von ω nach Ord in M liegt bereits in M) verwendet. Dummerweise wollte er dann noch diesen technischen Beweis sehen – das habe ich aber nicht mehr hinbekommen. Herr Koepke hat ihn mir dann erklärt.

Fazit:

Ich hatte nach der Prüfung nicht das Gefühl, mit der Leistung eine 1.0 verdient zu haben, aber Koepke sah das gottlob anders – „Ich gebe Ihnen 1.0, warum auch nicht?“ Vergleicht man die Prüfung mit anderen Protokollen, fällt auf, dass er doch sehr viele technische Dinge gefragt hat – deren Nichtwissen einem scheinbar nicht zum Nachteil gereicht, wenn man wenigstens ein paar Dinge dazu sagen kann.

Ich wünsche allen zukünftigen Koepke-Prüflingen viel Erfolg bei Euren Prüfungen und möchte Euch den Rat geben: Lernt außer den „Standards“ wenig auswendig, sondern versucht zu annähernd allen Details eine Heuristik parat zu haben, sodass ihr jederzeit begründen könnt, was ihr tun wollt, auch wenn ihr nicht präzise sagen könnt, wie ihr das nun genau tun würdet.

Abschließend bedanke ich mich bei allen, die mir bei der Vorbereitung dieser Prüfung geholfen haben, insbesondere bei Marion Esser für die Bereitstellung der Vorlesungsmitschrift.

Harald G. Grohgan